数学の研究をはじめよう
小学生が再発見した不思議な数式

飯高 茂

2023 年 8 月 16 日

1 はじめに

新型コロナ感染症蔓延のため社会人のために (定年退職後) 開いていた数学の連続講義を打ち切りにせざるを得なくなった.

その代わり数学の zoom ゼミ、題して「数学大好き」を開催し 2023 年には 3 年を超えた. 原則として週 2 回 (月と木, 8:00-9:00). 大学で扱う数学のトピックの連続講義と各自の研究発表を切れ目無く続けている。登録者数は 90, 常時出席者が 20 名強.

私は現役の（放送大学）学生なので大学のメールアドレスを使って zoom を登録したおかげで無料である.

2　小学 4 年生からの投稿

2023 年の夏に、小学 4 年生の参加者 高橋湊翔君から zoom ゼミ「数学大好き」に投稿があった．フェルマ素数の不思議な性質と題して鉛筆で書かれた数式が出ている．

一見して複雑極まりないもので自分では手に負えないと思い zoom　ゼミのメンバーに直ちに配布した．

3　簡単な場合

一見すると暑苦しく感じるのではじめに簡単な場合を説明する．

$R = 3^a * 5^b, (a, b > 0)$ とおく．

1. $\alpha = \sigma(R) = \dfrac{3^{a+1}-1}{2} * \dfrac{5^{b+1}-1}{4}$ は相異なる 2 個の素数の積と仮定する (大きな仮定)

2. そのオイラー関数を求める．

$\alpha_1 = \varphi(\sigma(R)) = \varphi(\dfrac{3^{a+1}-1}{2})\varphi(\dfrac{5^{b+1}-1}{4}) = (\dfrac{3^{a+1}-3}{2}) * (\dfrac{5^{b+1}-5}{4})$

すると, $\alpha_1 = 3 * 5 * \dfrac{3^a-1}{2} * \dfrac{5^b-1}{4}$.

3. $\beta = \varphi(R) = \varphi(3^a * 5^b) = 2 * 4 * 3^{a-1} * 5^{b-1}$.

この約数の和を求める．

4. $\beta_1 = \sigma(\beta) = \sigma(2 * 4 * 3^{a-1} * 5^{b-1}) = 15\dfrac{3^a-1}{2} * \dfrac{5^b-1}{4}$

これは見事に α_1 に等しい．

すなわち, $R = 3^a * 5^b$ が素数の条件 (大きな仮定) を満たせば式 $\varphi(\sigma(a)) = \sigma(\varphi(a))$　が成り立つ．

この式を満たす数をここでは $\varphi\sigma$ 可換数と呼ぶ．

$\varphi\sigma$ 可換数がかくも簡単にでてきたことは注目に値する．

私は最初簡単な 3^a で確認した．　続けて 5^b について行ったら結果がでなかった．くっつけて $3^a * 5^b$ の形ににしないとできない．　これは思いがけないことだった．

思ったより手強いので本格的に議論を進めた．

4　本気になって

$F(r) = 2^{2^r} + 1$ とおく．$F(0) = 3, F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537$ はフェルマ素数．これを以下では順に Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 で引用する．

とくに値を決めないで $a(r) > 0$ とおく．

$R = \prod_{0 \le r \le 4} Q_r^{a(r)}$ と仮に定める．

1.

$\alpha = \sigma(R) = \prod_{0 \le r \le 4} \dfrac{Q_r^{a(r)+1}-1}{Q_r-1}$. これは相異なる 5 個の素数の積と仮定する (大きな仮定)

2.

$\alpha_1 = \varphi(\sigma(R)) = \prod_{0\leq r\leq 4} \dfrac{Q_r(Q_r^{a(r)}-1)}{Q_r-1} = \prod_{0\leq r\leq 4} Q_r \prod_{0\leq r\leq 4} \dfrac{(Q_r^{a(r)}-1)}{Q_r-1}$

3.

$\beta = \varphi(R) = \varphi(\prod_{0\leq r\leq 4} Q_r^{a(r)}) = \prod_{0\leq r\leq 4} Q_r^{a(r)-1}(Q_r-1)$.

$Q_r - 1 = F(r) - 1 = 2^{2^r}$ に関して 各 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ について $2^{2^r}+1$ の積を求めると 2^{31}.

よって, $\beta = 2^{31} \prod_{0\leq r\leq 4} Q_r^{a(r)-1}$.

4.

$\beta_1 = \sigma(\beta) = (2^{32}-1) \prod_{0\leq r\leq 4} \dfrac{(Q_r^{a(r)}-1)}{Q_r-1}$

一方,

$$2^{32}-1 = (2^{16}-1)Q_4 = (2^8-1)Q_3Q_4 = (2^4-1)Q_2Q_3Q_4 = Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4$$

ゆえに $\beta_1 = \alpha_1$.

はフェルマ素数を用いて組織的に $\varphi\sigma$ 可換数ができたことになる.

5　素数の探求

$q = (R^{a+1} - 1)/(R - 1)$ が素数になる a を $R = 3, 5, 17$ について求めた.

表 1: $q = (R^{a+1} - 1)/(R - 1)$:素数, $R = 3$

a	q
2	13
6	1093
12	797161

表 2: $q = (R^{a+1} - 1)/(R - 1)$:素数, $R = 5$

a	q
2	31
6	19531
10	12207031
12	305175781

表 3: $q = (R^{a+1} - 1)/(R - 1)$:素数, $R = 17$

a	q
2	307
4	88741
6	25646167

6　$\varphi\sigma$ 可換数

$\varphi\sigma$ 可換数をパソコンで探してみよう. 奇数と偶数で場合分けをする.

表 4: 奇数の $\varphi\sigma$ 可換数

a	
9	3^2
225	$3^2 * 5^2$
729	3^6
18225	$3^6 * 5^2$
65025	$3^2 * 5^2 * 17^2$
140625	$3^2 * 5^6$
531441	3^12
5267025	$3^6 * 5^2 * 17^2$

素数の探求で得られた 3,5,17 についての指数が巧みに使われているのが不思議である.
奇数の $\varphi\sigma$ 可換数をパソコンで列挙したらここにフェルマ素数 3,5,17 がたくさん出ている. 注目すべきであろう.

奇数の $\varphi\sigma$ 可換数がフェルマ素数をネタにして生成されることが日本の小学生によって発見されたのだとするとニュースと言わざるをえない.
念のため数学の先行研究を調べてみることにした.
オンライン数列大辞典 (Online Encyclopedia of Integer Sequences) で 9,225,729,18225 から始まる数列を検索した.
その結果これは $\varphi(\sigma(a)) = \sigma(\varphi(a))$ を満たす奇数からなる数列で数列番号 A159939 が割り当てられていた.
しかもこれらはファルマ素数から一定の方法で作られたものに限るという予想がある. と書かれていた.
数学は数千年にわたる歴史を持っていて, すごい大発見だと思っても実は再発見だとわかることが普通に起きる.
しかし次の数列は登録されていない.

一見して奇怪としかいいようのな複雑極まりない数列である. 偶数と奇数でこれほど見栄えが異なるのが他にあるだろうか.

表 5: 偶数の $\varphi\sigma$ 可換数

a	
242	$2 * 11^2$
516	$2^2 * 3 * 43$
3872	$2^5 * 11^2$
13932	$2^2 * 3^4 * 43$
14406	$2 * 3 * 7^4$
17672	$2^3 * 47^2$
20124	$2^2 * 3^2 * 13 * 43$
21780	$2^2 * 3^2 * 5 * 11^2$
29262	$2 * 3 * 4877$
29616	$2^4 * 3 * 617$
45996	$2^2 * 3 * 3833$
76832	$2^5 * 7^4$
92778	$2 * 3 * 7 * 47^2$