数学の研究をはじめよう
比と一般角の本質

飯高 茂

2023 年 7 月 19 日

1　はじめに

社会人のために数学の連続講義をしているが高校数学において数学を本質的に深く理解できるように願っている.

2　　比ととは何か

今回は比を取り上げる.

比は小学校の算数でも扱われているが、正面から「比とは何ですか」と質問されたら困ってしまうことが多いのではないだろうか.

比は計算できないから数とは言えない. しかし図形でもない. その上, 比の値というものがあった (昔は確かに教えられた)

例えば 3:2 の比の値は分数で $\frac{3}{2}$ と書ける.

比が等しいことの定義はよく知られている

$a : b = c : d$ はその内項の積 bc と外項の積 ad が等しいこと. すなわち $bc = ad$ である.

$0 : 0$ はあってはならないが $a \neq 0$ なら $a : 0$ は　$1 : 0$ と等しい.

0 でない k を各項にかけても比は変わらない. $ka : ka = a : b$.

比の積があるかどうかはわからないが $(a : k)(k : b) = a : b$ は正しい.

この際, 次のように比を整理したい.

0 零子を持たない環, すなわち整域　R の 2 つの元のペア (a, b) を考える. ただし (0,0) は除く.

(a, b) ら全体は集合 $S = \{(a, b)|(0, 0)\}$

S において関係　$(a, b) \sim (c, d)$ を $bc = ad$ で定義する.

同値関係

するとこの関係は 反射律, 対称律, 推移律を満たすので　同値関係になる.

念のためこれらの説明を付け加える.

$x \in S$ について $x \sim x$ が常に成り立つとき反射律を満たすという.

$x, y \in S$ について $x \sim y$ ならば　$y \sim x$ が常に成り立つとき対称律を満たすという.

$x, y, z \in S$ について $x \sim y$,　$y \sim z$ ならば　$x \sim z$ が常に成り立つとき推移律を満たすという.

反射律, 対称律, 推移律を満たすとき　同値関係になるという.

a と同値な x をすべて集めた集合 を $[a]$ と書きこれらを　類 (クラス) という.

これらの類の和集合をとると元の集合 S になりこれらの類は共通部分を持たない.

これは簡単なことなので証明しておく.

$[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ならば　$[a] = [b]$.

Proof $c \in [a] \cap [b]$ をとると, $c \sim a, c \sim b$.

$c \sim a$ なので 対称律により, $a \sim c$.

$c \sim b$ と組み合わせると, 推移律によって $a \sim b$. したがって, $[a] = [b]$. **q.e.d.**

ここでは対称律, 推移律が有効に使われている.

最も簡単な反射律はどのように使うのだろうか.

a と同値な x をとると $a \sim x$. 対称律で $x \sim a$. 推移律によって $a \sim a$. かくして反射律が証明できる.

反射律によって $[a]$ の元に　a　が存在することが保障されている. これがないと $[a] = \emptyset$ がおこるかもしれない.

さて $S = \{(a, b)|(0, 0)\}$　に戻って議論を続けよう.

$(a, b) \sim (c, d)$ を $bc = ad$ ということで各類は同じ　$[a, b] = [c, d]$ となる.

記号 $[a, b]$ はよく使われるので比についは $a : b$ という記号を使う. $b \neq 0$ なら $[a, b] = a : b$ を　$\dfrac{a}{b}$ と書き, これを分数という.

(a, b) が代表する類が分数　$\dfrac{a}{b}$ でありこのとき a を類としての分数の分子とは言えない.a は (a, b) の分子で, b は (a, b) の分母であってこれらが代表する類の分母や分子ではない.

従って $bd \neq 0$ ならば比についても分数と同じく加法も乗法自由自在にすることは可能である.

例えば

$$a : b + c : d = (ad + bc) : (bd), (a : b) * (c : d) = ac : bd$$

したがって比とは何かと問われたらある同値関係の定める類であって, $a : b$ は　$b \neq 0$ なら分数　$\dfrac{a}{b}$ と同じです, と答えてよい.

3　3 点の比

比を活用するには 新たな記号を用意するとよい.

$[a,b,c]$ を相異なる a,b,c について　$[a,b,c]$　$= \dfrac{b-a}{c-b}$ と定義する.

$\alpha \neq 0$ について 1 次式 $f(x) = \alpha x + \beta$ を定義すると

命題 1 (不変性) $[f(a), f(b), f(c)]$　$= [a,b,c]$ が成り立つ.

$f(b) - f(a) = \alpha(b-a)$ などが成り立つからこれはあきらか.

次に平面上の 3 点 P_1, P_2, P_3 について　$[P_1, P_2, P_3]$ を定めたいがここでは直線上の相異なる 3 点についてのみ定義する.

P_1, P_2, P_3 の座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とおく.

直線上の相異なる 3 点について考えるので直線の定義式 $y = \alpha x + \beta$　がある. 不変性によって $[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$.

そこで,　$[P_1, P_2, P_3] = [x_1, x_2, x_3]$ によって, 3 点の比を定める.

2 本の平行線 L_1, L_2 がありそれに交わる 3 本の平行線 M_1, M_2, M_3 のあるとき

L_1 と　M_1, M_2, M_3 の交点 P_1, P_2, P_3 L_2 と　M_1, M_2, M_3 の交点 Q_1, Q_2, Q_3 について,

3 点の比 $[P_1, P_2, P_3] = [Q_1, Q_2, Q_3]$ は等しい.

4　複比

相異なる a_1, a_2, a_3, a_4 について

$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a_1, a_2, a_3] : [a_1, a_4, a_3] = [a_1, a_2, a_3]/[a_1, a_4, a_3]$ を定義する.

3 点の比 $[a_1, a_2, a_3], [a_1, a_4, a_3]$ の比なので　複比 (cross ratio) という.

$x = a_2$ とおいて 1 次式　$F(x) = [a_1, x, a_3]/[a_1, a_4, a_3] = \dfrac{x-a_1}{x-a_3} / \dfrac{a_4-a_1}{a_4-a_3}$ とおく.

$F(a_1) = 0, F(a_3) = \infty, F(a_4) = 1$ を満たす.

定理 1 *1 次分数式* $f(x) = \alpha x + \beta \gamma x + \delta, (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$ とおくとき
$[f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)] = [a_1, a_2, a_3, a_4]$.

Proof

$g(x) =$　$[f(a_1), f(x), f(a_3), f(a_4)]$ とおく,

$g(a_1) =$　$[f(a_1), f(a_1), f(a_3), f(a_4)] = 0, g(a_3) =$　$[f(a_1), f(a_3), f(a_3), f(a_4)] = \infty$.

よって 1 次分数式は $g(x) = \dfrac{x-a_1}{x-a_3}C$. C は定数, と書ける.

$g(a_4) = [f(a_1), f(a_4), f(a_3), f(a_4)] = 1$ によって $\dfrac{a_4-a_1}{a_4-a_3}C = 1$.

$1/C = \dfrac{a_4-a_1}{a_4-a_3}C$ によって, $g(x) =$　$[a_1, x, a_3, a_4]$.

それゆえ $g(a_2) =$　$[a_1, a_2, a_3, a_4]$.

q.e.d.

次に平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 について　これらが直線上の相異なる 4 点についてのみ定義する.

すなわち, $[P_1, P_2, P_3, P_4] = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ によって定める.

5　線対称 (line symmetry)

原点を通る直線 L :$y = mx, (m \neq 0)$ を指定しこの上にない点 P(x_1, y_1) から L に垂 線 H を下ろしその交点 M(x_0, y_0) をとる. H の上の点 Q(x_2, y_2) を PM と等距離にとる. すなわち, M は PQ　の中点である.

このようにして, P と Q を対応させることが L を対称軸にする線対称 (line symmetry) である.

線対称は鏡映とも呼ばれ幾何学では極めて重要であり, 比の概念の応用として線対称を求めて見よう.

(x_1, y_1) から (x_2, y_2) が 1 次変換として求められる.

i. M の決定.

H は　L に直交するのでその式の傾きを m' とすると $mm' = -1$. したがって H の式は $y - y_1 = m'(x - x_1)$.

M(x_0, y_0) は　H,L の交点なので連立方程式 $y = mx, y - y_1 = m'(x - x_1)$ の解が (x_0, y_0) .

ゆえに $x_0 = \dfrac{y_1 - m'x_1}{m - m'}, y_0 = mx_0 = \dfrac{my_1 + x_1}{m - m'}$, ($mm' = -1$ を使った)

ii. M は PQ　の中点.

$x_2 + x_1 = 2x_0, y_2 + y_1 = 2y_0$ に M の式を入れる.

$x_2 + x_1 = 2x_0 = 2\dfrac{y_1 - m'x_1}{m - m'}, y_2 + y_1 = 2y_0 = 2\dfrac{my_1 + x_1}{m - m'}$

$$x_2 = 2\frac{y_1 - m'x_1}{m - m'} - x_1 = \frac{2y_1 - 2m'x_1 - (m - m'x_1)}{m - m'} = \frac{-(m + m')x_1 + 2y_1}{m - m'}$$

$$y_2 = 2\frac{my_1 + x_1}{m - m'} - y_1 = \frac{2my_1 + 2x_1 - (m - m')y_1}{m - m'} = \frac{2x_1 + (m + m')y_1}{m - m'}.$$

iii. 三角関数を使う.

$m = \tan\theta$ とする. $m' = -/m = -\cot\theta$.

$s = \sin\theta, c = \cos\theta, S = \sin 2\theta, C = \cos 2\theta$ を使って記号を簡易化する.

$$m - m' = \frac{s}{c} + \frac{c}{s} = \frac{s^2 + c^2}{sc} = \frac{2}{2sc} = \frac{2}{S},$$

$$m+m' = \frac{s}{c} - \frac{c}{s} = \frac{s^2-c^2}{sc} = \frac{-C}{sc} = \frac{-2C}{S}.$$

以上によって, $(m-m')S = 2, (m+m')S = -2C.$

$$x_2 = \frac{-(m+m')x_1 + 2y_1}{m-m'} = \frac{-S(m+m')x_1 + 2y_1 S}{2} = -Cx_1 + Sy_1.$$

$$y_2 = \frac{2x_1 + (m+m')y_1}{m-m'} = \frac{2x_1 S + S(m+m')y_1}{2} = Sx_1 - Cy_1.$$

このようにして結果は回転の式と極めて似たものとなった. 読者は著者が既知の結果を思い出しながら計算したと推理することだろう.

実は 80 を超えて人生で初めてこの計算をしたのである. 驚嘆すべきことがらであった.

6　一般角

群 G とその部分群 H について, $x, y \in G$ について, $yx^{-1} \in H$ のとき同値 $x \sim y$ とするとこれは同値関係で, その類の集合を G/H と書きこれを類別集合という. H が正規部分群なら, G/H は群となり商群と呼ばれる.

加法群であればアーベル群で部分群はすべて正規で商群をあえて $GmodH$ と書く.

$G = \mathbb{R}$ を実数全体の加法群とし部分群 $H = 2\pi\mathbb{Z}$ を考える.

$GmodH$ の元がラジアンを使った角度である.

$\alpha \in \mathbb{R}$ が定める, これを $GmodH$ の元とみると　角度で, これを与える代表は　$2\pi n$ を加えたものすべてでこれ一般角である.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点のペア (P,Q) は有向線分とみることができる.

2 つの有効線分　(P,Q),(P',Q') は平行移動で重なるなら同値ということにする. その同値類がベクトルである.

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の図形の研究が平面幾何学であろう.

ふたつの図形 F,F' は平行移動, 回転, 線対称変換で重なるなら 2 つの図形は合同である.

図形が等しいとは重なる場合であるという. これは部分集合として同じであると理解することができる.

古代ギリシャの数学者は数が等しいこと, 図形が等しいことの認識に同値関係への深理解があったように思われる.