数学の研究を始めよう (8)
約数の和関数のグラフ

飯高 茂

平成 25 年 12 月 30 日

1　約数の和関数 $\sigma(a)$

自然数 $a>1$ の約数の和を $\sigma(a)$ と表し, **約数の和**関数と呼ぶ. たとえば $a=4$ なら約数は $1,2,4$ になるので $\sigma(a)=1+2+4=7$.

2　約数の和関数のグラフ

パソコン君に頼んで約数の和関数のグラフを作ってもらった. $a \leq 4000$ を x 軸にとり, $\sigma(a)$ を y 軸にとったグラフは次の図 1 である.

このグラフから次のことがわかる. 原点付近を通る直線があり, その上側にのみ点が並んでいる. ここでは, 点を大きくするためスター印で示している. 右側の限界線は赤い直線なのだが, 雑誌の誌面ではそれが赤く見えないのが残念である.

実際, a が素数の場合は $\sigma(a)=a+1$ であり, $x=a, y=\sigma(a)$ とおけば $y=x+1$ となる. これが限界線の方程式である. 幸いにも素数はかなり多いので, これらが直線に見えるのである.

目のいい人はこの限界線のところどころに切れ目があることに気づくであろう. これは自然数列において, 素数が全然でない大きめの区間がときどきあることに対応している. 2000 までの範囲で探したところ表 1 にあるように素数の無い場所が発見された. 1327 と 1361 は素数であるがその間は素数がない. 図 1 でもその辺りが空いている.

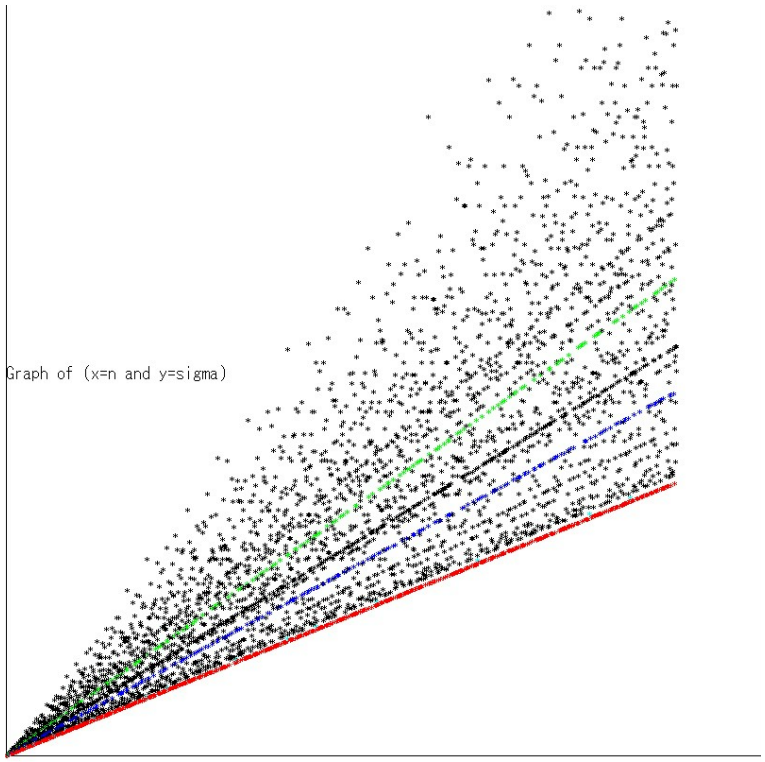

図 1: $a \leq 4000$ の場合

表 1: 1327 は素数. その後 1361 まで素数は現れない

a	素因数分解
1327	[1327]
1328	[2,2,2,2,83]
1329	[3,443]
1330	[2,5,7,19]
1331	[11,11,11]
1332	[2,2,3,3,37]
1333	[31,43]
1334	[2,23,29]
1335	[3,5,89]
1336	[2,2,2,167]
1337	[7,191]
1338	[2,3,223]
1339	[13,103]
1340	[2,2,5,67]
1341	[3,3,149]
1342	[2,11,61]
1343	[17,79]
1344	[2,2,2,2,2,2,3,7]
1345	[5,269]
1346	[2,673]
1347	[3,449]

a	素因数分解
1348	[2,2,337]
1349	[19,71]
1350	[2,3,3,3,5,5]
1351	[7,193]
1352	[2,2,2,13,13]
1353	[3,11,41]
1354	[2,677]
1355	[5,271]
1356	[2,2,3,113]
1357	[23,59]
1358	[2,7,97]
1359	[3,3,151]
1360	[2,2,2,2,5,17]
1361	[1361]

a が素数 $p>2$ の 2 倍の場合は $\sigma(a)=\sigma(2p)=3p+3=\frac{3}{2}a+3$ を満たす. $x=a, y=\sigma(a)$ とおけば $y=\frac{3}{2}x+3$ となる.

一般に $a=mp$ とし, p は素数, m と p は互いに素なとき

$$\sigma(a)=\sigma(mp)=\sigma(m)\sigma(p)=\sigma(m)(p+1)$$

となる. これを m 倍して

$$m\sigma(a)=\sigma(m)(mp+m)=\sigma(m)(a+m)$$

なので $x=a, y=\sigma(a)$ とおけば $y=\frac{\sigma(m)}{m}x+\sigma(m)$ となる.

次の表 2 には 14 以下の m に関し直線 $y=\frac{\sigma(m)}{m}x+\sigma(m)$ の式が挙げられている. これらの直線が図 1 のグラフで見えていることになる.

$x=a=p^2$(素数の平方) なら $y=\sigma(a)=1+a+a^2=1+x+x^2$ なので放物線になる. しかし素数の平方は素数に比べると少ないのではっきりした放物線には見えない.

さて, このグラフは一価関数のグラフであるが, 1 つの数 a について直線 $x=a$ を考えるといくつもの交線があるように見える. しかし, これは錯覚である. 実際, $a<100$ に限ったグラフ図 2 をみれば, 確かにこれらが一価関数のグラフであることが納得できるであろう.

表 2:

m	$\sigma(m)$	$\frac{\sigma(m)}{m}$	$y=\frac{\sigma(m)}{m}x+\sigma(m)$
2	3	$\frac{3}{2}$	$y=\frac{3}{2}x+3$
3	4	$\frac{4}{3}$	$y=\frac{4}{3}x+4$
4	7	$\frac{7}{4}$	$y=\frac{7}{4}x+7$
5	6	$\frac{6}{5}$	$y=\frac{6}{5}x+6$
6	12^1	2	$y=2x+12$
7	8	$\frac{8}{7}$	$y=\frac{8}{7}x+8$
8	15	$\frac{15}{8}$	$y=\frac{15}{8}x+15$
9	13	$\frac{13}{9}$	$y=\frac{13}{9}x+13$
10	18	$\frac{9}{5}$	$y=\frac{9}{5}x+18$
11	12	$\frac{12}{11}$	$y=\frac{12}{11}x+12$
12	28^2	2	$y=2x+28$
13	14	$\frac{14}{13}$	$y=\frac{14}{13}x+14$
14	24	$\frac{12}{7}$	$y=\frac{12}{7}x+24$

2.1 左側の限界

グラフの右側は $y=x+1$ で限られているが, 左側はどうだろう. さっと見た限りでは $y \leq 4x$ などが成立しそうである.

しかしそのような限界はないのである.

順に並べた素数の数列 $2,3,5,7,11,\cdots$ を $\{\pi_j\}$ とおく. 順に r 個の素数を掛けた数を m_r とおけば

$$\frac{\sigma(m_r)}{m_r}=\frac{\pi_1+1}{\pi_1}\frac{\pi_2+1}{\pi_2}\frac{\pi_3+1}{\pi_3}\cdots\frac{\pi_r+1}{\pi_r}=(1+\frac{1}{\pi_1})(1+\frac{1}{\pi_2})\cdots(1+\frac{1}{\pi_r}).$$

よって

$$\frac{\sigma(m_r)}{m_r}>1+\frac{1}{\pi_1}+\frac{1}{\pi_2}+\frac{1}{\pi_3}+\cdots+\frac{1}{\pi_r}.$$

ところで, 右辺を r についての数列の項とみるとこれは単調増大数列で $r\to\infty$ のとき無限に大きくなることが証明されている. ただし, $\log\log$ で評価できる増大度でありきわめて緩慢にしか増えない.

29 まで素数を掛けたときの傾き $\frac{\sigma(m)}{m}$ を求めたのが 表 2 である. このとき傾きは 3.876886385 になるので, 確かに 4 以下である.

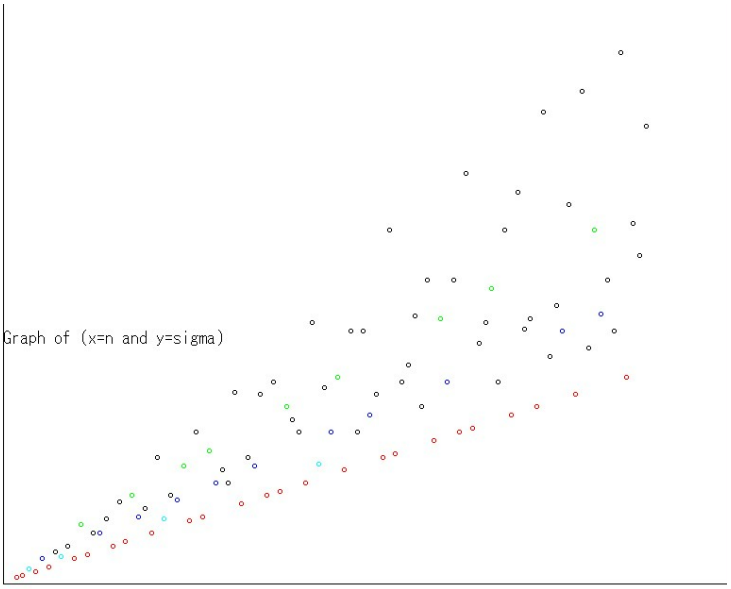

図 2: $a < 100$ に限ったグラフ

2.2 右側の限界

右側の限界をさらに精密に調べるため 関数 $G(x)$ を $G(x) = \sigma(x) - x - \sqrt{x} - 1$ で定める．x が素数の平方 p^2 なら $G(p^2) = \sigma(p^2) - p^2 - p - 1 = 0$ になる．そこで, 素数以外の自然数 a について $G(a)$ の順に並べてみよう．

a を素因数分解し ${p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r}$ とおく．ここで $p_1, p_2, \cdots, p_r$ らは相異なる素因数である．素数のべき ${p_1}^{e_1}, {p_2}^{e_2}, \cdots, {p_r}^{e_r}$ らを並べ替えて増大する数列とみなしこの各項の正の平方根をあらためて ξ_j とおく．

すると ${\xi_j}^2 = {p_j}^{e_j}$ であり

$$\sigma({p_j}^{e_j}) \geq 1 + {p_j}^{e_j} = 1 + {\xi_j}^2$$

により ${\xi_j}^2$ らの積が a となり, それを次のように簡単に $a = \Pi {p_j}^{e_j}$ と記そう．そのとき

$$\sigma(a) = \Pi\sigma({p_j}^{e_j}) \geq \Pi(1 + {p_j}^{e_j}) = \Pi(1 + {\xi_j}^2) \tag{1}$$

を満たす．

表 3:

π_j	m_j	π_j+1	$(\pi_j+1)/\pi_j$	$\Pi(\pi_j+1)/\pi_j$
2	2	3	1.5	1.5
3	6	4	1.333333333	2
5	30	6	1.2	2.4
7	210	8	1.142857143	2.742857143
11	2310	12	1.090909091	2.992207792
13	30030	14	1.076923077	3.222377622
17	510510	18	1.058823529	3.411929247
19	9699690	20	1.052631579	3.591504471
23	223092870	24	1.043478261	3.747656839
29	6469693230	30	1.034482759	3.876886385

2.3 不等式

やや一般に正項数列 について次の不等式を示す. 正項数列 $\{x_j\}$ は単調増大数列で, ${x_j}^2$ は自然数. その最小数は 2 とする. このとき,

$$X_r = ({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)\cdots({x_r}^2+1), Y_r = {x_1}^2{x_2}^2\cdots{x_r}^2, Z_r = x_1x_2\cdots x_r$$

とおき, $G_r = X_r - Y_r - Z_r - 1$ とする.

命題 1 $r \geq 2$ なら $G_r > 1$.

この不等式を以下で帰納法を用いて証明する.
$r = 2$ のとき.

$$G_2 = X_2 - Y_2 - Z_2 - 1 = ({x_1}^2+1)({x_2}^2+1) - (x_1x_2)^2 - x_1x_2 - 1 = x_2(x_2 - x_1) + {x_1}^2 > 2.$$

$r+1 \geq 3$ の場合. $G_r > 0$ の場合は仮定されているから
$X_{r+1} = X_r(x_{r+1}^2+1), Y_{r+1} = Y_r x_{r+1}^2, Z_{r+1} = Z_r x_r$ を G_{r+1} に代入して

$$\begin{aligned}
G_{r+1} &= X_r x_{r+1}^2 + X_r - Y_r x_{r+1}^2 - Z_r x_{r+1} - 1 \\
&= x_{r+1}^2(X_r - Y_r - Z_r - 1) + X_r + Z_r x_{r+1}(x_{r+1} - 1) + x_{r+1}^2 - 1 \\
&= x_{r+1}^2 G_r + X_r + Z_r x_{r+1}(x_{r+1} - 1) + x_{r+1}^2 - 1 \\
&> x_{r+1}^2 G_r > 1.
\end{aligned}$$

$r = 1$ のときは $a = p^e$ のときに使う. ここで p は素数で $e \geq 3$ であり $G(p^e) \geq G(p^3)$. かつ $G(p^3) \geq G(2^3) = G(8) = 3.171572875$.
さらに $G(27) = 6.803847577$ の他は $G(p^e)$ は 10 を超える.

表 4: $G(a)$ の順に並べる

a	因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-a$	$G(a)$
4	[2,2]	7	3	0
9	[3,3]	13	4	0
25	[5,5]	31	6	0
49	[7,7]	57	8	0
121	[11,11]	133	12	0
169	[13,13]	183	14	0
289	[17,17]	307	18	0
361	[19,19]	381	20	0
529	[23,23]	553	24	0
841	[29,29]	871	30	0
961	[31,31]	993	32	0
1369	[37,37]	1407	38	0
1681	[41,41]	1723	42	0
1849	[43,43]	1893	44	0

$r \geq 2$ のとき. 式 (1) により, $\sigma(a) \geq \Pi(1+{\xi_j}^2)$ と $G_r > 1$ に注目すると

$$\sigma(a) \geq \Pi(1+{\xi_j}^2) > \Pi{\xi_j}^2 + \Pi\xi_j + 1 = a + \sqrt{a} + 1.$$

これによって a が素数および素数の平方でないなら $G(a) > 0$ が示された. さらに $x = a, y = \sigma(a) > a + \sqrt{a} + 1 = x + \sqrt{x} + 1$ になり $(y-x-1)^2 > x$ を満たす.

これは限界線の内側に放物線の限界があることを示している.

表 5: $G(a)$ の順に並べる. 続き

a	因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-a$	$G(a)$
6	[2,3]	12	6	2.550510257
8	[2,2,2]	15	7	3.171572875
10	[2,5]	18	8	3.83772234
15	[3,5]	24	9	4.127016654
14	[2,7]	24	10	5.258342613
21	[3,7]	32	11	5.417424305
35	[5,7]	48	13	6.083920217
27	[3,3,3]	40	13	6.803847577
33	[3,11]	48	15	8.255437353
22	[2,11]	36	14	8.30958424
55	[5,11]	72	17	8.583801513
77	[7,11]	96	19	9.225035613
39	[3,13]	56	17	9.755002002
26	[2,13]	42	16	9.900980486
65	[5,13]	84	19	9.937742252
16	[2,2,2,2]	31	15	10
30	[2,3,5]	72	42	35.52277442

3 $2\sigma(a)-3a=x$ の解

この後は, 先月号の続きである.

$a=2p$ 特徴付けが $2\sigma(a)-3a=6$ でできた. そこでこの条件を平行移動しよう.

$-5\leq x\leq 3$ の場合について $2\sigma(a)-3a=x$ $(a<2000)$ の解をエクセルの表 6 をもちいて調べてみる. 何がでてくるか本当に楽しみである.

表 6 を観察して興味ある結果がみつかったら証明してみよう.

証明できれば新しい定理がえられることになる.

a	因数分解	$\sigma(a)$	$2\sigma(a)-3a$
7	[7]	8	-5
39	[3,13]	56	-5
279	[3,3,31]	416	-5
5	[5]	6	-3
33	[3,11]	48	-3
261	[3,3,29]	390	-3
385	[5,7,11]	576	-3
897	[3,13,23]	1344	-3
3	[3]	4	-1
9	[3,3]	13	-1
27	[3,3,3]	40	-1
81	[3,3,3,3]	121	-1
243	[3,3,3,3,3]	364	-1
729	[3,3,3,3,3,3]	1093	-1
2	[2]	3	0
21	[3,7]	32	1
4	[2,2]	7	2
15	[3,5]	24	3
207	[3,3,23]	312	3
1023	[3,11,31]	1536	3

3.1 $2\sigma(a)-3a=-5$ の解

$2\sigma(a)-3a=-5$ の解として 7 と $39=3\times 13, 279=3^2\times 31$ が出ている．

されにパソコン君に依頼して $a<200000$ の範囲で探索してみたら $a=178119$ が出てきた．その素因数分解は [3,3,3,3,3,733] ので $a=3^6\times 733$ である．

これらの解は $a=3^e p$ のように素数 p を用いて書かれている．そこで $a=3^e p$ (素数 $p>4$) として書ける場合について解を探そう．

$$\begin{aligned}2\sigma(a)&=2\sigma(3^e p)\\&=(3^{e+1}-1)(p+1)\\&=3^{e+1}p+3^{e+1}-(p+1).\end{aligned}$$

なので $2\sigma(a)=3a-5=3^{e+1}p-5$ に注意すると $3^{e+1}-(p+1)=-5$ が成り立てばよい．そこで $3^{e+1}+4$ が素数になるものを探す．

$e=0$ なら $p=7$. これは解である．

パソコン君によるとさらに次のような解があった．

⟨1⟩ $p=3^9+4=19687, a=3^8\times 19687,$

⟨2⟩ $p=3^{10}+4=59053, a=3^9\times 59053.$

次の予想をたててもいいのはないか.
$2\sigma(a)=3a-5$ の解は $a=3^e p$ (ここで p は素数) と表され $p=3^{e+1}+4$ 満たす.
このような解は無限にあることを予想とする.

3.2 $2\sigma(a)-3a=-3$ の解

この場合に $a<100000$ についてパソコン君に解を探してもらった. その結果次の表をえた.

a	因数分解	$\sigma(a)$
33	[3,11]	48
261	[3,3,29]	390
385	[5,7,11]	576
897	[3,13,23]	1344
2241	[3,3,3,83]	3360
26937	[3,3,41,73]	40404
46593	[3,3,31,167]	69888

この場合は解の一般的形の推測すら困難を感じる.

3.3 $2\sigma(a)-3a=-1$ の解

表 6 によると $2\sigma(a)-3a=-1$ の解 a は 3 のべきに違いない.
実際,$a=3^e$ から $2\sigma(a)=3^{e+1}-1=3a-1$ より $2\sigma(a)-3a=-1$.
ここまでは簡単なのだが, この逆, すなわち $2\sigma(a)-3a=-1$ の解は 3 のべきであることを示したいのだが, 難しいであろう.
しかしできるところまでやってみたら次のようになった.
$2\sigma(a)-3a=-1$ 解が 3 の倍数の場合を考える.
$a=3^e L(e>0, L$ は 3 で割れない) とかくと,

- $2\sigma(a)=2\sigma(3^e)\sigma(L)=(3^{e+1}-1)\sigma(L)$,
- $3a-1=3^{e+1}L-1=(3^{e+1}-1)L+L-1$

によって,

$$(3^{e+1}-1)\sigma(L)=(3^{e+1}-1)L+L-1.$$

これより

$$(3^{e+1}-1)(\sigma(L)-L)=L-1.$$

これから $L>1$ なら矛盾を導きたい. しかし, ここで冷温停止状態に陥ってしまった.

3.4 $2\sigma(a) - 3a = 0$ の解

このとき $2\sigma(a) = 3a$ とすると, $2, 3$ は互いに素なので $a = 2k, \sigma(a) = 3k$ と書ける.
$k = 1$ なら $a = 2$ になる。これが唯一の解になることをいいたい.
$k = 2$ なら $a = 4$ なので $\sigma(a) = 7$. これは $\sigma(a) = 3k$ に矛盾.
$k > 2$ なら, $1, 2, k, 2k$ は相異なりこれらは $a = 2k$ の約数なので

$$3k = \sigma(a) \geq 1 + 2 + k + 2k = 3 + 3k = 3(1 + k) > 3k.$$

これは矛盾. こうして $a = 2$ が唯一の解になることの証明ができた.

3.5 $2\sigma(a) - 3a = 1$ の解

表 6 では 21 が唯一解にみえた．しかし $2\sigma(a) - 3a = 1$ の解をパソコンに探してもらうとつぎのように数多く見つかった．

表 6: $2\sigma(a) - 3a = 1$ の解

a	数分解	$\sigma(a)$
21	[3,7]	32
2133	[3,3,3,79]	3200
19521	[3,3,3,3,241]	29282

解の形は $3^e p$ なのでこの形の解を探索する．

$a = 3^e p$ を $2\sigma(a) - 3a = 1$ に代入すると $p = 3^{e+1} - 2$ なのでパソコン君はこれなら簡単だと言って次の解 $e = 5$, $p = 3^6 - 2 = 727$,$a = 176661$ を出してくれた．

さて $2\sigma(a) - 3a = 1$ の解は素数 $p = 3^{e+1} - 2$ からすべてえられるのだろうか．

もしそうなら, $2\sigma(a) - 3a = 1$ の解は完全数が素数 $p = 2^{e+1} - 1$ から得られたこととときわめて類似している．その点で興味がある．

3.6 $2\sigma(a) - 3a = 2$ の解

表 6 から推察すると 4 が唯一解．この証明は読者に委ねる．

$2\sigma(a) - 3a = 3$ の解の研究はまだ何もできていない．

研究課題

$3\sigma(a) - 4a = x$ の解を調べよ．