数学の研究をはじめよう
新世代完全数とその発展
前編 φ^2 完全数

飯高 茂, 齋藤之理

2023 年 11 月 4 日

1　齋藤之理 の 新世代完全数

ベースとして素数 p, 平行移動 m, 奇素数の乗数 h について $\sigma(p^e) = \dfrac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}, (\overline{p} = p-1)$ になるので,

$q = \dfrac{hp^{e+1}-1}{\overline{p}} + m$ を素数と仮定するとき $\alpha = p^e q$ をユークリッドの完全数の一般化と考えることは自然である.

約数関数 $\sigma(\alpha)$ の代わりにオイラー関数をもちいて完全数の一般化を行う.

$X = p^e$ を使うと $q = \dfrac{hpX-1}{\overline{p}} + m$ になる.

$\alpha = Xq$ なので , $\overline{p}\alpha = (hpX - 1 + m\overline{p})X = hpX^2 + (-1 + m\overline{p})X$.

$p\varphi(X) = X\overline{p}$ により $p\varphi(\alpha) = X\overline{p}(q-1) = hpX^2 + (m\overline{p} - p)X$.

$$p\varphi(\alpha) - \overline{p}\alpha = -\overline{p}X.$$

かくして得られた２式

$$\overline{p}\alpha = hpX^2 + (-1 + m\overline{p})X, \overline{p}X = -p\varphi(\alpha) + \overline{p}\alpha$$

を連立方程式とみなしこれを満たす自然数 α を齋藤之理の φ^2 完全数, 整数 X をそのパートナーという.

上の２式から X を消去すると長い定義式ができて $\varphi(\alpha)^2$ を含む. これはオイラー関数のみを用いてできた完全数として前例をみないものである. この新しいは [1], 第 9 章 に掲載された.

著者は当時中１の齋藤之理さんである. 私は式が複雑なので研究は非常な困難があるに違いないと思った.

彼が 2013 年 8 月のフィボナッチ協会の講演会で発表する予定であったところ海外の研修旅行に出かることになり, そこでは話せなくなった.

私は代読者となりこの新しい完全数を紹介することになった. そこでこの論文を詳しく調べたところ意外にも分かりやすいところがあった.

定義式が複雑な分だけ対象が制約をうけて研究しやすくなったのである.

2　$p=2$ の場合

$p=2$ の場合は式が簡単になり $X=\alpha-2\varphi(\alpha), \alpha=2hX^2+(m-1)X$ となった .

以後は $p=2$ の場合に限り $m=0, h=1, m=0,-2,-12$ のときに計算すると次の表ができた.

表 1: Saito $\varphi(a)^2$ 完全数,$h=1, m=0,2,-12; p=2$

a	素因数分解				
$m=0$		$m=2$		$m=-12$	
3	3	10	$2*5$	15	$3*5$
6	$2*3$	136	2^3*17	24	2^3*3
21	$3*7$	32896	2^7*257	304	2^4*19
28	2^2*7	2147516416	$2^{15}*65537$	2535	$3*5*13^2$
465	$3*5*31$			127744	2^8*499
496	2^4*31			33501184	$2^{12}*8179$
8128	2^6*127			8589082624	$2^{16}*131059$

$m=0$ のとき古典的完全数 6,28,496,8128,33550336 などの解がでている.

奇数解 $3, 21=3*7, 465=3*5*31$ もでている. ここで,3,5 はフェルマ素数, 7,31 はメルセンヌ素数.

$m=-12$ のとき 通常の完全数に出てきた $6Q$ の形の解 (Q: 3 以外の素数) はないが $2^eQ, (Q=2^{e+1}-13))$ は A 型解で全部でている.

ここでも奇数解が 2 個あり最初の 2 つの素因数はフェルマ素数.

また, 偶数解にユークリッドの完全数以外の解があるか, どのくらいあるか, などが思い浮かぶ課題である.

2.1　第 4 の奇数解

$h=1, m=0$ のとき齋藤之理は第 4 の奇数解を発見した.

$w=3*5*17*257=2^{16}-1$ は容易に確認できる.

これの素因子はフェルマ素数. さらに $v=131071=2^{17}-1$ はメルセンヌ素数で $v-1=2(2^{16}-1)=2w; v=2w+1$ を満たす.

命題 1 $\alpha=wv$ が奇数の解

Proof

$\alpha = wv$ が奇数の解になることを確認するには $X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$ を計算し $\alpha = X(2X-1)$ を証明すればよい.

$\varphi(\alpha) = \varphi(wv) = \varphi(w)\varphi(v), \varphi(w) = \varphi(3*5*17*257) = 2^{15}, \varphi(v) = v - 1 = 2w$

これより $\varphi(\alpha) = 2^{16}w$. $2\varphi(\alpha) = 2^{17}w = (v+1)w$.

$$X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = wv - (v+1)w = -w.$$

$$2X - 1 = -2w - 1,$$

によると,$X(2X-1) = w(2w+1) = wv = \alpha$.

q.e.d.

ここで得られた奇数解はフェルマー素数の積にメルセンヌ素数を掛けた形である.

本当に美しい構造をもっているので思わず感動した.

$m = 0$ のときの奇数解はこれらの 4 つしかないと私は想像している.

この論文では偶数の解の決定を行う.

一般に奇素数 Q にって 2^eQ と書ける解を A 型解という. A 型解は齋藤がすでに決定している.

3　オイラーの定理の類似

次の結果はオイラーの定理の類似である.

定理 1 $h=1, m=0$ のとき φ^2 完全数 α が偶数なら $\alpha=2^eQ, (Q=2^{e+1}-1$:素数)(ユークリッドの完全数) になる

Proof

仮定によって $\alpha=2^eL, (L:$ 奇数$)$ と書ける.$(\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L))$ を用いる.
$X=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$ になるゆえ

$$\alpha=X(2X-1)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L)-1)$$

$\alpha=2^eL$ を用いて整理すると

$$L=\mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L)-1)$$

L が素数なら $L=Q$ とおくと $Q=2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数で $\alpha=2^eQ$ はユークリッドの完全数.
L が合成数なら $d=\mathrm{co}\varphi(L)$,$\delta=2^{e+1}d-1$ とおくと
$L=\mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L)-1)=d(2^{e+1}d-1)=d\delta.$
d,δ は互いに素なので, $L=d\delta$ により $\varphi(L)=\varphi(d)\varphi(\delta)\leq(d-1)(\delta-1).$

$$d=\mathrm{co}\varphi(L)=d\delta-\varphi(d\delta)\geq d+\delta-1.$$

これは矛盾.

q.e.d.

よって解が偶数ならこの解はユークリッドの完全数.

4　A 型解について

以下では p=2に限って　φ^2 完全数のみを扱うが h,m は一般の場合を考える.

命題 2 $X=2^\varepsilon$ のとき $\alpha=2^\varepsilon Q, (Q:$ 素数$)$

Proof

$X=2^\varepsilon=\alpha-2\varphi(\alpha)$ により α:偶数. $\alpha=2^eL(L:,$ 奇数$)$.
$X=2^\varepsilon=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$.　ゆえに, $\mathrm{co}\varphi(L)=2^{\varepsilon-e}$
L は奇数なので $\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L)$ も奇数. よって, $e=\varepsilon, \mathrm{co}\varphi(L)=1.$
L:素数なのでこれを Q と書けば, $\alpha=2^\varepsilon Q$. これは A 型解.

q.e.d.

一般に A 型解 $\alpha=2^\varepsilon Q$ を $X=\alpha-2\varphi(\alpha)$ に入れると $X=2^\varepsilon$.
$\alpha=2hX^2+(m-1)X$ に代入すれば,
$\alpha=2^\varepsilon Q=(2hX+m-1)X=(2h2^\varepsilon+m-1)2^\varepsilon.$
よって $Q=h2^{\varepsilon+1}-1+m, \alpha=2^\varepsilon Q$.　これは A 型解. .
これは先祖返り (宮本憲一).

5 一般偶数の解 α

一般に　偶数解 α を考察する. $\alpha = 2^e L$ と奇数 L を用いて書く.
$X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$ に代入すれば $X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 2^e \mathrm{co}\varphi(L)$
$d = \mathrm{co}\varphi(L)$ とおくと, $X = 2^e d, 2^e L = \alpha = X(2hX+(m-1)) = 2^e d(2^{e+1}hd+(m-1))$.
ゆえに　$\delta = hd2^{e+1} + m - 1$ を定義すると

$$L = d\delta.$$

i. $d = 1$ なら L: 素数 Q で, $\alpha = 2^e Q$.
ii. $d > 1$ なら L: 合成数. $\delta = h2^{e+1}d + m - 1$.
$\delta > 1$ とする.
$L = d\delta$ によって,d, δ は互いに素と仮定する.
$\varphi(L) = \varphi(d)\varphi(\delta) \leq (d-1)(\delta-1)$.

$$d = \mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L) = d\delta - \varphi(d)\varphi(\delta) \geq d + \delta - 1.$$

これは矛盾.
$\delta = 1$ とする.$L = d\delta = d$ によって $d = \mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L) = d - \varphi(d)$
$\varphi(d) = 0$ となり矛盾.
次の結果は一般にオイラーの定理の類似が成立することを主張する.

定理 2 $\alpha = 2^e L$ と奇数 L であらわすとき, $d = \mathrm{co}\varphi(L)$ とおく.
$L = d\delta$ において,d, δ は互いに素とすると A 型解になる. 言い換えると 解 α は一般のユークリッド型完全数になる.

A 型解にならない例を挙げる.

表 2: φ^2 完全数 $\alpha, m = -56; X$ をそのパートナ

α	素因数分解	X	
224	$2^5 * 7$	32	2^5
722	$2 * 19^2$	38	$2 * 19$
1485	$3^3 * 5 * 11$	45	$3^2 * 5$
4544	$2^6 * 71$	64	2^6
25472	$2^7 * 199$	128	2^7
495104	$2^9 * 967$	512	2^9
2145615872	$2^{15} * 65479$	32768	2^{15}

ここにおいて $722 = 2 * 19^2$ は非 A 型解, $1485 = 3^3 * 5 * 11$ は奇数解.

表 3: φ^2 完全数 $\alpha, m = -2 * 496, X$ をそのパートナ

α	素因数分解	X	
15872	$2^9 * 31$	512	2^9
219122	$2 * 331^2$	662	$2 * 331$

$219122 = 2 * 331^2$ は非 A 型.
ここでは完全数 k に対して, $m = -2k$ となる例をあげている.

6 準 A 型解

素数 Q により $\alpha = 2^e Q$ と書ける A 型解のほかに $\alpha = 2Q^2$ となる解が多数ある.
より一般に $\alpha = 2^e Q^\varepsilon, (\varepsilon > 1)$ と書ける解を準 A 型解という.
このとき $X = \alpha - 2\varphi (= 2^e Q^{\varepsilon-1}$.
ゆえに, $\alpha = X(2hX + m - 1)$ によって, $Q = 2hX + m - 1 = 2^e hQ^{\varepsilon-1} + m - 1$.
かくて　次の簡単な式 $(2^e hQ^{\varepsilon-2} - 1)Q = 1 - m$ を得る.
$\varepsilon = 2$ のとき, $(2^e h - 1)Q = 1 - m$ となる.
たとえば, $h = 1, m = -56$ なら $Q = 19$, $h = 1, m = -2 * 496$ なら $Q = 331$.

$\varepsilon = 3, Q = 3, e = 1$ のとき,$m = -32$.

表 4: φ^2 完全数 $\alpha, m = -32, X$ をそのパートナ

α	素因数分解	X	
54	$2 * 3^3$	18	$2 * 3^2$
242	$2 * 11^2$	22	$2 * 11$
992	$2^5 * 31$	32	2^5
28544	$2^7 * 223$	128	2^7
122624	$2^8 * 479$	256	2^8

ここでは最初の 2 つは 準 A 型. 残りは A 型.

以上において d, δ が互いに素を仮定した.

実際, $h = 1, m = -20, \alpha = 36 = 2^2 * 3^2$. すると $X = 12 = 2 * d, d = 6, \delta = 2hX + m - 1 = 24 - 21 = 3$.

7　完全数についての驚くべき結果

ここで $m = -2k, h = e = 1, (k$:完全数$)$ のとき

$1 - m = (2k + 1) = 3Q, (Q:$ 素数$)$ が成り立つなら $\alpha = 2Q^2$ は 準 A 型解になる.

次の結果は小学 6 年の但見東による.

命題 3 (但見東) $2^n - 1$ が素数の時 $n > 2$ なら $A = 2^n(2^n - 1) + 1$ は *3* の倍数.

Proof

$2^n \equiv 1, 2 \bmod 3$ なので場合分けする.

i. $2^n \equiv 1 \bmod 3$ のときは $2^n - 1$ は素数に反する.

ii. $2^n \equiv 2 \bmod 3$ のときは $2^n(2^n - 1) + 1 \equiv 0 \bmod 3$. $2^n(2^n - 1) + 1$ は 3 の倍数.

q.e.d.

完全数をさらに詳しく検討すると次のようになった

表 5: n 番目の k:完全数; $1 - m = 2k + 1$ の素因数分解

n	k:完全数	素因数分解	$2k+1$	素因数分解
2	28	$2^2 * 7$	57	3*19
3	496	$2^4 * 31$	993	3*331
4	8128	$2^6 * 127$	16257	3*5419
5	33550336	$2^{12} * 8191$	67100673	3*22366891
6	8589869056	$2^{16} * 131071$	17179738113	3*307*2857*6529
7	137438691328	$2^{18} * 524287$	274877382657	3*571*160465489

オイラーの見出した第 8 完全数 k の場合,

素因数分解は $2k + 1 = \quad 3 * 529510939 * 2903110321$.

第 9 完全数 k の場合,　素因数分解は $2k{+}1 = 3{*}177230399437988782976979507730256 1451$

次の結果は単に計算したらこうなったというだけだが偶然にしてはうまく行き過ぎている, というしかない.

定理 3 第 *2,3,4,5,9* 完全数 k は $2k + 1 = 3Q$ と 素因数分解できる.$2Q^2$ は $m = -2k$ のときの準 *A* 型解.

しかし第 1,6,7 完全数のときは $2k + 1$ は上記のような素因数分解にならない.

このことは小学 4 年の柴田心春も独立に確認した.

偶数 非 A 型解は現在調べた範囲ではみな準 A 型　$2^e Q^\varepsilon$ の形をしている. (次の予想が正しければ解決する)

予想: $\mathrm{co}\varphi(L)$ が L の約数なら L は素数べき.

奇数解の場合はいろいろあって興味深いものとなりそうだ.