(A,B,C) 完全数の例：乗数付きオイラー型完全数 小学生の発見した定理

飯高 茂

2019/12/26

1 (A,B,C) 完全数のやさしい例

与えられた定数項 D と整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca = D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

$(1, 0, 2)$ 完全数は古典的完全数を起源にもつ.

実際に $a = 2^e$ なら $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1 = 2a - 1$ を満たす.

$(1, 0, 2) = (A, B, C)$ とみて, さらに定数部分を 一般の定数項に入れ $\sigma(a) - 2a = D$ を (1,0,2) 完全数の式とみる.

固有完全数の定義式は $\sigma(k) = 2k$ になりこの解として定義された固有完全数は元祖 (古典的) 完全数になる.

固有完全数 k_0 に対して 宇宙定数項は $D_0 = 2k_0$ であって $\sigma(a) = 2a + 2k_0$ が宇宙完全数の定義式となる.

最も簡単な完全数 $k_0 = 6$ のときを考えると $D_0 = 2k_0 = 12$.

$\sigma(a) = 2a + 12$ は固有完全数 6 の 宇宙完全数方程式になる. これの解は昔から 12 だけ過剰な過剰数と呼ばれそれなりの注目を集める存在であった.

2　乗数 h 付き Euler 型 宇宙完全数

$h > 2$ を奇素数として $a = h * 2^e$ を考える.$\varphi(h) = h - 1 = 2\nu$ とおく.
$\varphi(a) = \varphi(h2^e) = (h-1)2^{e-1} = 2^e\nu$ なのでこれを h 倍する.
$h\varphi(a) = 2^e h\nu = \nu a$.
定数項 D に対して

$$h\varphi(a) - \nu a = D$$

これを, $(0, h, \nu)$ 完全数の定義式とみる.
さて pk を解とする場合を考えてみよう.
$a = pk(p, k$ と互いに素な複数個の素数 $p)$ とおくとき

$$h\varphi(kp) - \nu kp = D.$$

$h\varphi(kp) - \nu kp = (h\varphi(k) - \nu k)p - h\varphi(k) = D$.
ここで p の係数 $(h\varphi(k) - \nu k)$ を 0 として, 固有完全数 k の方程式は次のようになる.

$$h\varphi(k) - \nu k = 0.$$

h は素数で, $\varphi(h) = h - 1 = 2\nu$ なので, h, ν は互いに素. したがって,h は k の約数になり, $h|k.k = h^\varepsilon L(h \not| L)$ と書ける $\varepsilon > 0$ がある.
これを上の式に代入すると,

$$h\varphi(k) = h^\varepsilon \overline{h}\varphi(L) = 2h^\varepsilon \nu\varphi(L), \nu k = \nu h^\varepsilon L.$$

$h\varphi(k) - \nu k = 0$ により,

$$2h^\varepsilon \nu\varphi(L) = \nu h^\varepsilon L.$$

ゆえに,

$$2\varphi(L) = L.$$

これより $L = 2^\eta, (\eta > 0)$. よって, $k = h^\varepsilon L = h^\varepsilon 2^\eta$. こうして固有完全数解 $k_0 = h^\varepsilon 2^\eta$ が求められ, これの定める 宇宙定数項 D_0 は $-h\varphi(k_0) = -\nu k_0 = -\nu h^\varepsilon 2^\eta$ となる.
これを用いた宇宙完全数の方程式は

$$h\varphi(a) - \nu a = D_0.$$

定義より $2, h$ と異なる素数 p に対して $k_0 p$ は宇宙完全数になる. すなわちこの方程式の解である. これらを通常解ともいう. 通常解ではない宇宙完全数を探すことは大きな課題になる.

3　$h = 3$ のとき

記号が煩瑣になることを避けるため, $h = 3$ と仮定する. このとき $h-1 = 2 = 2 * nu, \nu = 1$ となり 固有完全数 k の定義式は $3\varphi(k) - k = 0$. この解は $k_0 = 2^e 3^f, (e, f > 0)$.

宇宙定数項 D_0 は $= -k_0 = -2^e 3^f$.

Euler 型宇宙完全数の方程式は

$$3\varphi(a) - a = D_0 = -2^e 3^f.$$

a は 3 の倍数なので,$a = 3^\eta L, (3 \not| L)$ と書けて

$3\varphi(a) - a = 3\varphi(3^\eta L) - 3^\eta L = 2 * 3^\eta \varphi(L) - 3^\eta L = 3^\eta(2\varphi(L) - L) = -2^e 3^f$.

$$\begin{aligned} 3\varphi(a) - a &= 3\varphi(3^\eta L) - 3^\eta L \\ &= 2 * 3^\eta \varphi(L) - 3^\eta L \\ &= 3^\eta(2\varphi(L) - L) \\ &= -2^e 3^f \end{aligned}$$

により

$$3^\eta(2\varphi(L) - L) = -2^e 3^f.$$

書き換えて

$$L - 2\varphi(L) = 2^e 3^{f-\eta}.$$

i. $f = \eta$.

このとき $L - 2\varphi(L) = 2^e$ なので, $L = 2^\xi M, (2 \not| M)$ と書けて,

$$L - 2\varphi(L) = 2^\xi M - 2^\xi \varphi(M) = 2^\xi(M - \varphi(M) = 2^e.$$

$$M - \varphi(M) = 2^{e-\xi}.$$

$M > 1$ ならば M:奇数 なので $M > 2$ になり, $\varphi(M)$:偶数. ゆえに $M - \varphi(M) = 2^{e-\xi}$.

$2^{e-\xi}$ は奇数になるので, $2^{e-\xi} = 1$. よって $e - \xi = 0$.

その結果 $M - \varphi(M) = 1$. これは M が素数になる. そこで $M = p$ と素数らしく書くとき, $a = 3^\eta L = 3^\eta 2^\xi p$.

ここで, $f = \eta, e = \xi$ なので, $a = 3^f 2^e p = k_0 p$. したがって通常解.

$M = 1$ ならば $L = 2^\xi$. $L - 2\varphi(L) = 2^\xi - 2^\xi = 0$. したがって $L - 2\varphi(L) = 2^e$ に矛盾する.

ii. $f > \eta$.

$\psi = f - \eta$ とおくとき $L - 2\varphi(L) = 2^e 3^\psi$.

$e > 0$ により, L は偶数. そこで $L = 2^\xi M, (2 \nmid M)$ と書くことができ,

$$L - 2\varphi(L) = 2^\xi M - 2^\xi \varphi(M) = 2^\xi (M - \varphi(M)) = 2^e 3^\psi.$$

$\zeta = e - \xi$ とおけば

$$M - \varphi(M) = 2^\zeta 3^\psi.$$

$M = 1$ ならば $0 = M - \varphi(M) = 2^\zeta 3^\psi$. これは矛盾.

$M > 1$ なので $\varphi(M)$ は偶数で, M は奇数. ゆえに $2^\zeta 3^\psi$ も奇数. したがって, $\zeta = 0$; $e = \xi$.

$$co\varphi(M) = M - \varphi(M) = 3^\psi.$$

これを M について解くことが意外にも難しい.

$\psi = f - \eta > 0$ であるが

$\psi = 1$ のとき, $co\varphi(M) = M - \varphi(M) = 3$ となり $M = 9$. M は6 と互いに素なので矛盾.

$\psi = 2$ のとき, $co\varphi(M) = M - \varphi(M) = 9$ となり $M = 27, 21$. M は6 と互いに素なので矛盾.

$\psi = 3$ のとき, $co\varphi(M) = M - \varphi(M) = 27$ となり, M が 3 の倍数でないなら $M = 115 = 5 * 23, M = 187 = 11 * 17$.

$M = 115 = 5 * 23$ の 2 つの素因子の和は $5 + 23 = 28 = 3^3 + 1$.

$M = 187 = 11 * 17$ の 2 つの素因子の和は $11 + 17 = 28 = 3^3 + 1$.

ここで, M を 2 つの異なる素因子の積 PQ と仮定する. $\Delta = P + Q$ とおくとき, $co\varphi(M) = PQ - (PQ - \Delta + 1) = \Delta - 1$.

したがって, $co\varphi(M) = M - \varphi(M) = 3^\psi$ を使うと $\Delta - 1 = 3^\psi$.

$P + Q = \Delta = 3^\psi + 1$ となる P, Q があれば解 $M = PQ$ を得る.

8 以上の偶数は 相異なる素因子の和で表せるという Goldbach の予想が意味を持つ.

さて問題は, $\psi \geq 3$ について $co\varphi(M) = 3^\psi$ を満たし, 2,3 の倍数ではない M をすべて求めることである.

M に重複因子 $P^n, n > 1$ があるなら　P は 3^ψ の因子になるべきであり, $P = 3$ ということになる.

したがって, M には重複因子がない. 2 因子なら $M = PQ$ となり $P + Q = 3^\psi + 1$ を満たす P, Q を見出せばよい.

これは一見して簡単なのだが, Goldbach の予想が想起される難しさを孕んでいる.

M に 3 個以上の重複因子がある場合を求めることが課題である.

次はパソコンによる計算結果を示す. 思いもかけないことに 3 個以上の重複因子がある場合を見つけることができない.

(A, B, C) 完全数の一般理論で, $A = 0$ の場合が最も扱いやすい.$h = 2$ は容易に解決できたが $h = 3$ ではオイラー余関数の逆問題 $co\varphi(M) = 3^\psi$ を解くことになり, Goldbach の予想がからむ本質的難問が出てきた. お先真っ暗かと嘆いていた暗闇の中に 1 条の光が見えた.

2019 年が閉じようとしているとき 11 歳の少年梶田光が優れた定理を見出した.

4　梶田光の定理

定理 1 (梶田光,2019) $B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k が存在するとき B, C がともに奇数を仮定すると, B が素数で $C = (B - 1)/2$.

このとき $k = 2^e B^f, e, f > 0$.

表 1: $M-\varphi(M)=3^{\psi}$ の解

M	qr	q	r	$3^{\psi}+1$	$q+r$
$\psi=3$		$3^{\psi}+1=3^{3}+1$		28	
115	$5*23$	5	23		28
187	$11*17$	11	17		28
$\psi=4$		$3^{\psi}+1=3^{4}+1$		82	
781	$11*71$	11	71		82
1357	$23*59$	23	59		82
1537	$29*53$	29	53		82
$\psi=5$		$3^{\psi}+1=3^{5}+1$		244	
1195	$5*239$	5	239		244
2563	$11*233$	11	233		244
3859	$17*227$	17	227		244
9259	$47*197$	47	197		244
10123	$53*191$	53	191		244
12283	$71*173$	71	173		244
14659	$107*137$	107	137		244
14803	$113*131$	113	131		244

表 2: $M - \varphi(M) = 3^{\psi}$ の解

M	qr	q	r	$3^{\psi}+1$	$q+r$
$\psi = 6$		$3^{\psi}+1 = 3^6+1$		730	
7909	$11*719$	11	719		730
20329	$29*701$	29	701		730
32101	$47*683$	47	683		730
35881	$53*677$	53	677		730
46789	$71*659$	71	659		730
53701	$83*647$	83	647		730
57049	$89*641$	89	641		730
69721	$113*617$	113	617		730
78469	$131*599$	131	599		730
81241	$137*593$	137	593		730
94021	$167*563$	167	563		730
96361	$173*557$	173	557		730
114181	$227*503$	227	503		730
117349	$239*491$	239	491		730
120229	$251*479$	251	479		730
122821	$263*467$	263	467		730
124009	$269*461$	269	461		730
126169	$281*449$	281	449		730
130309	$311*419$	311	419		730
132901	$347*383$	347	383		730

表 3: $M-\varphi(M)=3^{\psi}$ の解

M	qr	q	r	$3^{\psi}+1$	$q+r$
$\psi=7$		$3^{\psi}+1=3^{7}+1$		2188	
100627	$47*2141$	47	2141		2188
125611	$59*2129$	59	2129		2188
186811	$89*2099$	89	2099		2188
210787	$101*2087$	101	2087		2188
222667	$107*2081$	107	2081		2188
303811	$149*2039$	149	2039		2188
381427	$191*1997$	191	1997		2188
465811	$239*1949$	239	1949		2188
496267	$257*1931$	257	1931		2188
535867	$281*1907$	281	1907		2188
583747	$311*1877$	311	1877		2188
593107	$317*1871$	317	1871		2188
716587	$401*1787$	401	1787		2188
803707	$467*1721$	467	1721		2188
818611	$479*1709$	479	1709		2188
833227	$491*1697$	491	1697		2188
868507	$521*1667$	521	1667		2188
921211	$569*1619$	569	1619		2188
939787	$587*1601$	587	1601		2188
969307	$617*1571$	617	1571		2188