(A,B,C) 完全数 と至高の完全数

飯高 茂

2019/12/12

1　高校生のための完全数入門

自然数 a に対し自身以外の約数を足すと a になるとき a を完全数と言い, 完全数を数多く見いだすことに古今の数学者は多くの精力を傾けた.

その結果, 6 の他に 完全数として 28,496,8128 が紀元前に発見された.

しかもこれらの完全数は $p = 2^{e+1} - 1$ となる素数 p によって $2^e p$ と表せることがわかり, この形の素因数分解を持つ数は完全数になることが BC 3 世紀のユークリッドによる数学原論に書かれている.

自然数 a に対しその約数の和を $\sigma(a)$ と書き, これを関数と見てユークリッド関数という.

$a = 2^e$ とおく. $q = \sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ を素数と仮定すると, $\alpha = aq$ は完全数になる.

この形の完全数をユークリッドの完全数と呼ぶ.

実際 $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ を素数としてこれを p とおき, $\alpha = ap$ と書くと

$$\sigma(\alpha) = \sigma(a)\sigma(p) = p(p+1) = p(2^{e+1}) = 2p2^e = 2\alpha.$$

よって, $\sigma(\alpha) = 2\alpha$.

命題 1 (ユークリッド)**.** $a = 2^e$ に対して $p = \sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき $\alpha = ap$ とおくと $\sigma(\alpha) = 2\alpha$　を満たす. ゆえに α は完全数.

18 世紀になって, オイラーは偶数の完全数はユークリッドの完全数になることの証明に成功した.

2019 年現在 51 個もの完全数が発見されているが奇数の完全数は見つかっていない. それゆえ奇数完全数は存在しないだろうと想像されているが, 証明はできていない.

この問題はユークリッドが2300年後の数学者に出した数学界最高の難問と言ってよい. 現在でも解決の見通しすらたっていない.

次にオイラー (1707–1783) の時代にまで知られていた完全数を紹介する.

Table 1: 元祖完全数

完全数 a	素因数分解 $(2^e p)$
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$
33550336	$2^{12} * 8191$
8589869056	$2^{16} * 131071$
137438691328	$2^{18} * 524287$
2305843008139952128	$2^{30} * 2147483647$
$---$	(By L.Euler 1707–1783)

次のことは古代ギリシャ人も注目した重要な結果である.

- 完全数 a の末尾の数は 6,8.
- $a = 2^e p$ の奇数素因子 p の末尾の数は最初を除くと, 1,7.

2 完全数の平行移動

概完全数の定義 $\sigma(a) - 2a = -1$ に類似した式
$\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす a は 2019 年現在, 発見されていない.

Table 2: 完全数の平行移動 $\sigma(a)-2a=-m$

完全数 a	素因数分解 $(2^e p)$
$m=1$	
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
$m=2$	
3	3
10	$2*5$
136	2^3*17
32896	2^7*257
$m=4$	
5	5
14	$2*7$
44	2^2*11
152	2^3*19
2144	2^5*67
8384	2^6*131
110	$2*5*11$
884	$2^2*13*17$
18632	$2^3*17*137$

これらの解の素因数分解をすると $2^e q,(q$: 奇素数) の例が多くある. そこでこのような素因分解を持つ解を A 型解と呼ぶことにした.

そこでここを一般化して, 整数 m に対して $\sigma(a)-2a=-m$ を満たす a を調べてみることにしこれを平行移動 m の完全数と呼ぶことにした.

完全数の平行移動は思ったより筋の良い問題でこれをきっかけに完全数研究が大きく進展してきた.

3 (A,B,C) 完全数

新しく始められた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化することに長所があることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a = kp$:B 型解) とする.

$$\begin{aligned}
A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca &= A\sigma(k)(p+1) + B\varphi(k)(p-1) - Ckp \\
&= (A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck)p + A\sigma(k) - B\varphi(k) \\
&= D
\end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0, A\sigma(k) - B\varphi(k) = D.$$

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ により, $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D_0$ の解を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

4 底が一般の至高の完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という.

$m, e > 0$ を与えて, $q = \sigma(P^e) + m$ を素数と仮定する. $a = P^e q$ を底 P をもつ狭義の完全数という.

$q = \sigma(P^e) + m$ を変形して, $\overline{P}(q-m) + 1 = P^{e+1}$.

$\sigma(a) = \sigma(P^e)\sigma(q) = \dfrac{(P^{e+1}-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$
\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= \overline{P}\sigma(P^e)\sigma(q) \\
&= (P^{e+1}-1)(q+1) \\
&= aP - q + P^{e+1} - 1 \\
&= aP - q - 1 + \overline{P}(q-m) + 1 \\
&= aP - m\overline{P} + q(P-2).
\end{aligned}
$$

かくして $\overline{P}\sigma(a) = aP - m\overline{P} + q(P-2)$ を得るので, $L = \overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P}$ とおくと, $L = q(P-2)$. 書き換えて, $q = \dfrac{L}{P-2}$.

$a = P^e q$ のオイラー関数を計算する.

$$
\begin{aligned}
P\varphi(a) &= P\varphi(P^e q) \\
&= \overline{P}P^e(q-1) \\
&= \overline{P}P^e q - \overline{P}P^e \\
&= \overline{P}a - \overline{P}P^e
\end{aligned}
$$

により,

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - \overline{P}P^e.$$

さらに P をかけて $\overline{P}(q-m) + 1 = P^{e+1}$ 　を用いると

$$P^2\varphi(a) = P\overline{P}a - \overline{P}P^{e+1} = P\overline{P}a - \overline{P}(\overline{P}(q-m)+1).$$

これより

$$P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P} = -\overline{P}^2(q-m).$$

$K=P^2\varphi(a)-P\overline{P}a+\overline{P}$ とおくとき $-K=\overline{P}^2(q-m)$.

よって, $q=m-\dfrac{K}{\overline{P}^2}$. $q=\dfrac{L}{P-2}$ と組み合わせて

$$q=m-\frac{K}{\overline{P}^2}=\frac{m\overline{P}^2-K}{\overline{P}^2}=\frac{L}{P-2}.$$

これより

$$(m\overline{P}^2-K)(P-2)=L\overline{P}^2.$$

$L=\overline{P}\sigma(a)-aP+m\overline{P}, K=P^2\varphi(a)-P\overline{P}a+\overline{P}$ を代入すると

$$L\overline{P}^2=(\overline{P}\sigma(a)-aP+m\overline{P})\overline{P}^2=(P-2)(m\overline{P}^2-P^2\varphi(a)+P\overline{P}a-\overline{P}).$$

$$(\overline{P}\sigma(a)-aP+m\overline{P})\overline{P}^2=(P-2)(m\overline{P}^2-P^2\varphi(a)+P\overline{P}a-\overline{P})$$

を

$$(\overline{P}\sigma(a)-aP+m\overline{P})\overline{P}^2-((P-2)(m\overline{P}^2-P^2\varphi(a)+P\overline{P}a-\overline{P})=0$$

に直して, 左辺を $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の形に整理する.

$A=\overline{P}^3$ は $\sigma(a)$ の係数,$B=(P-2)P^2$ は $\varphi(a)$ の係数, $C=P\overline{P}^2+(P-2)P\overline{P}=P(P-1)(2P-3)$ は $-a$ の係数,

定数項は

$$\begin{aligned}D&=-m\overline{P}^3+(P-2)(m\overline{P}^2-\overline{P})\\&=-\overline{P}(m\overline{P}^2+(P-2)(m\overline{P}-1)\\&=-\overline{P}(m\overline{P}+(P-2))\end{aligned}$$

$$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D.$$

この解を至高の完全数 (supreme perfect numbers) と呼ぶ.

Table 3: $P = 3, 5, 7$

P	A	B	C	D
2	1	0	2	$-m$
3	8	9	18	$-2(2m+1)$
5	64	75	140	$-4(4m+3)$
7	216	245	462	$-6(6m+5)$

Table 4: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -18$	
87237	$3^5 * 359$
255	$3 * 5 * 17$
57615	$3 * 5 * 23 * 167$
$m = -14$	
46449	$3^2 * 13 * 397$

5 固有完全数

固有完全数 $k_0 = 10, 322 = 2 * 7 * 23$.

i. $k_0 = 10$ のとき

$A = 8, B = 9, C = 18$ により $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0) = 18*10 - 2*9\varphi(10) = 6 * 18 = 108$.

ii. $k_0 = 322$ のとき

$A = 8, B = 9, C = 18$ により $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0) = 18 * 322 - 2 * 9\varphi(322) = 18(322 - 6 * 22) = 18 * 190 = 3420$.

($*$) をつけた解は天与の解.

Table 5: $P=3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m=-12$	
8	2^3
$m=-10$	
999	3^3*37
18291	$3*7*13*67$
$m=-6$	
6	$2*3$
99	3^2*11
285	$3*5*19$
6417	$3^2*23*31$
46917	$3^2*13*401$
76461	$3*7*11*331$
$m=-2$	
4	2^2
75	$3*5^2$

6 底が一般の至高の重完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という.

$m, e>0$ を与えて, $q=\sigma(P^e)+m$ を素数と仮定する. $a=P^{e+1}q$ を底 P をもつ狭義の至高の重完全数という.

$q=\sigma(P^e)+m$ を変形して, $\overline{P}(q-m)+1=P^{e+1}, P\overline{P}q-P\overline{P}m+P=P^{e+2}$.

$\sigma(a)=\sigma(P^{e+1})\sigma(q)=\dfrac{(P^{e+2}-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$
\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= \overline{P}\sigma(P^{e+1})\sigma(q) \\
&= (P^{e+2}-1)(q+1) \\
&= aP-q+P^{e+2}-1 \\
&= aP-q-1+P\overline{P}q-P\overline{P}m+P \\
&= aP-1+(-1+P\overline{P})q-P\overline{P}m+P.
\end{aligned}
$$

かくして $\overline{P}\sigma(a)=aP-1+(-1+P\overline{P})q-P\overline{P}m+P$ を得るので,

Table 6: $P=3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m=0$	
10	$2*5$
322	$2*7*23$
$m=2$	
117	3^2*13
$m=4$	
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
$m=6$	
5	5
14	$2*7$
15	$3*5$
231	$3*7*11$
1107	3^3*41

$L_1=\overline{P}\sigma(a)-aP+1+P\overline{P}m-P$ とおくと,
$L_1=(-1+P\overline{P})q$. 書き換えて, $q=\dfrac{L_1}{-1+P\overline{P}}$.
$a=P^{e+1}q$ のオイラー関数を計算する.

Table 7: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = 8$	
7	7
$m = 10$	
7353	$3^2 * 19 * 43$
47853	$3^2 * 13 * 409$
$m = 12$	
11	11
$m = 14$	
13	13
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$

Table 8: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -108$	
30	$2 * 3 * 5$
70	$2 * 5 * 7$
110	$2 * 5 * 11$
130	$2 * 5 * 13$
170	$2 * 5 * 17$
190	$2 * 5 * 19$
230	$2 * 5 * 23$
290	$2 * 5 * 29$
310	$2 * 5 * 31$
370	$2 * 5 * 37$
410	$2 * 5 * 41$
430	$2 * 5 * 43$
470	$2 * 5 * 47$
$m = -106$	
351	$3^3 * 13$

Table 9: $P=3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m=-3420$	
966	$2*3*7*23$
1122	$2*3*11*17(*)$
1610	$2*5*7*23$
2090	$2*5*11*19(*)$
2210	$2*5*13*17(*)$
3342	$2*3*557(*)$
3542	$2*7*11*23$
4186	$2*7*13*23$
5474	$2*7*17*23$
6118	$2*7*19*23$
9338	$2*7*23*29$
9982	$2*7*23*31$
11914	$2*7*23*37$
13202	$2*7*23*41$
13846	$2*7*23*43$
15134	$2*7*23*47$
17066	$2*7*23*53$
18998	$2*7*23*59$
19642	$2*7*23*61$
21574	$2*7*23*67$
22862	$2*7*23*71$
23506	$2*7*23*73$
25438	$2*7*23*79$
26726	$2*7*23*83$

$$\begin{aligned}
P\varphi(a) &= P\varphi(P^{e+1}q) \\
&= \overline{P}P^{e+1}(q-1) \\
&= \overline{P}P^{e+1}q - \overline{P}P^{e+1} \\
&= \overline{P}a - \overline{P}P^{e+1} \\
&= \overline{P}a - \overline{P}(\overline{P}q - \overline{P}m + 1)
\end{aligned}$$

これより

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - \overline{P}^2(q-m) - \overline{P}.$$

よって,

$K_1 = P\varphi(a) - \overline{P}a - \overline{P}^2 m + \overline{P}$ とおくと $K_1 = -q\overline{P}^2$.

$q = \dfrac{K_1}{-\overline{P}^2}$. $q = \dfrac{L_1}{-1+P\overline{P}}$, と組み合わせて

$$L_1\overline{P}^2 + K_1(-1+P\overline{P}) = 0.$$

$$\begin{aligned} L_1\overline{P}^2 &= (\overline{P}\sigma(a) - aP + 1 + P\overline{P}m - P)\overline{P}^2 \\ &= A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1 \end{aligned}$$

とおくとき $L_1\overline{P}^2 = A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1$.

$$A_1 = \overline{P}^3\sigma(a), C_1 = P\overline{P}^2, D_1 = (1+P\overline{P}m - P)\overline{P}^2.$$

$$K_1(-1+P\overline{P}) = (P\varphi(a) - \overline{P}a - \overline{P}^2 m + \overline{P})(-1+P\overline{P}) = B_1\varphi(a) - C_2 a - D_2$$

とおくとき,

$$K_1(-1+P\overline{P}) = B_1\varphi(a) - C_2 a - D_2.$$

$$B_1 = (-1+P\overline{P})P, C_2 = \overline{P}(-1+P\overline{P}), D_2 = (-\overline{P}^2 m + \overline{P})(-1+P\overline{P})$$

$$\begin{aligned} L_1\overline{P}^2 + K_1(-1+P\overline{P}) &= A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1 + (B_1\varphi(a) - C_2 a - D_2) \\ &= A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - a(C_1+C_2) + D_1 - D_2) \end{aligned}$$

$$L_1\overline{P}^2 + K_1(-1+P\overline{P}) = A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - a(C_1+C_2) + D_1 - D_2).$$

$$A_1 = \overline{P}^3, C_1 = P\overline{P}^2, D_1 = (1+P\overline{P}m - P)\overline{P}^2.$$

$$B_1 = (-1+P\overline{P})P, C_2 = \overline{P}(-1+P\overline{P}), D_2 = (-\overline{P}^2 m + \overline{P})(-1+P\overline{P})$$

$$CC = C_1 + C_2 = P\overline{P}^2 + \overline{P}(-1+P\overline{P}) = \overline{P}(-1+2P\overline{P}),$$

$DD = D_1 - D_2 = (1 + P\overline{P}m - P)\overline{P}^2 - (-\overline{P}^2 m + \overline{P})(-1 + P\overline{P})$
$A_1 = \overline{P}^3, B_1 = (-1 + P\overline{P})P, CC = \overline{P}(-1 + 2P\overline{P})$.

$$A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - CCa = DD.$$

Table 10: $P = 2, 3, 5, 7$

P	A_1	B_1	C_1
2	1	2	3
3	8	15	22
5	64	95	156
7	216	287	498

Table 11: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m=-14	
187	$11 * 17$
7803	$3^3 * 17^2$
215163	$3^3 * 13 * 613$
m=-10	
17	17
1127	$7^2 * 23$
2997	$3^4 * 37$
m=-6	
13	13
18	$2 * 3^2$
297	$3^3 * 11$
441	$3^2 * 7^2$
1935	$3^2 * 5 * 43$
6517	$7^3 * 19$
30267	$3^3 * 19 * 59$
216567	$3^3 * 13 * 617$

Table 12: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m=-2	
217269	$3^3 * 13 * 619$
$m=0$	
7	7
52	$2^2 * 13$
66	$2 * 3 * 11$

Table 13: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 2	
4	2^2
5	5
25	5^2
125	5^3
143	$11 * 13$
351	$3^3 * 13$
625	5^4
3125	5^5
15625	5^6
78125	5^7

7 固有完全数

固有完全数 $k_0 = 7, 52, 66$.

i. $k_0 = 7$ のとき

$A_1 = 8, B_1 = 15, C_1 = 22$ により $D_0 = C_1 k_0 - 2B_1\varphi(k_0) = 22*7-30*6 = -26$.

ii. $k_0 = 52$ のとき

$D_0 = C_1 k_0 - 2B_1\varphi(k_0) = 22 * 52 - 30 * 24 = -424$.

iii. $k_0 = 66$ のとき

Table 14: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 6	
6	$2*3$
45	3^2*5
3321	3^4*41
24273	$3^3*29*31$
m= 14	
63	3^2*7
525	$3*5^2*7$
3483	3^4*43
8789	$11*17*47$
267543	3^6*367

Table 15: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 18	
15	$3*5$
459	3^3*17
2115	3^2*5*47
163275	$3*5^2*7*311$
m= 22	
931	7^2*19
154297	$11*13^2*83$
221481	$3^3*13*631$

$$D_0 = C_1k_0 - 2B_1\varphi(k_0) = 22*66 - 30*20 = -852.$$

Table 16: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
$m = 26$	
14	$2 * 7$
21	$3 * 7$
35	$5 * 7$
77	$7 * 11$
91	$7 * 13$
119	$7 * 17$
133	$7 * 19$
161	$7 * 23$
203	$7 * 29$
217	$7 * 31$
259	$7 * 37$
287	$7 * 41$
301	$7 * 43$

Table 17: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
$m = -424$	
156	$2^2 * 3 * 13$
260	$2^2 * 5 * 13$
364	$2^2 * 7 * 13$
431	431
572	$2^2 * 11 * 13$
884	$2^2 * 13 * 17$
988	$2^2 * 13 * 19$
1196	$2^2 * 13 * 23$
1508	$2^2 * 13 * 29$
1612	$2^2 * 13 * 31$
1924	$2^2 * 13 * 37$
2132	$2^2 * 13 * 41$
2236	$2^2 * 13 * 43$
2444	$2^2 * 13 * 47$
2756	$2^2 * 13 * 53$
3068	$2^2 * 13 * 59$
3172	$2^2 * 13 * 61$
3484	$2^2 * 13 * 67$
3692	$2^2 * 13 * 71$
3796	$2^2 * 13 * 73$
4108	$2^2 * 13 * 79$
4316	$2^2 * 13 * 83$
4628	$2^2 * 13 * 89$

Table 18: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
5044	$2^2 * 13 * 97$
5252	$2^2 * 13 * 101$
5356	$2^2 * 13 * 103$
5564	$2^2 * 13 * 107$
5668	$2^2 * 13 * 109$
5876	$2^2 * 13 * 113$
6604	$2^2 * 13 * 127$
6812	$2^2 * 13 * 131$
7124	$2^2 * 13 * 137$
7228	$2^2 * 13 * 139$
7748	$2^2 * 13 * 149$
7852	$2^2 * 13 * 151$
8164	$2^2 * 13 * 157$
8476	$2^2 * 13 * 163$
8684	$2^2 * 13 * 167$
8996	$2^2 * 13 * 173$
9308	$2^2 * 13 * 179$
9412	$2^2 * 13 * 181$
9932	$2^2 * 13 * 191$

Table 19: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
10036	$2^2 * 13 * 193$
10244	$2^2 * 13 * 197$
10348	$2^2 * 13 * 199$
10972	$2^2 * 13 * 211$
11596	$2^2 * 13 * 223$
11804	$2^2 * 13 * 227$
11908	$2^2 * 13 * 229$
12116	$2^2 * 13 * 233$
12428	$2^2 * 13 * 239$
12532	$2^2 * 13 * 241$
13052	$2^2 * 13 * 251$
13364	$2^2 * 13 * 257$
13676	$2^2 * 13 * 263$
13988	$2^2 * 13 * 269$
14092	$2^2 * 13 * 271$
14404	$2^2 * 13 * 277$
14612	$2^2 * 13 * 281$
14716	$2^2 * 13 * 283$
15236	$2^2 * 13 * 293$
15964	$2^2 * 13 * 307$
16172	$2^2 * 13 * 311$
16276	$2^2 * 13 * 313$
16484	$2^2 * 13 * 317$
17212	$2^2 * 13 * 331$
17524	$2^2 * 13 * 337$
18044	$2^2 * 13 * 347$
18148	$2^2 * 13 * 349$
18356	$2^2 * 13 * 353$
18668	$2^2 * 13 * 359$
19084	$2^2 * 13 * 367$
19396	$2^2 * 13 * 373$
19708	$2^2 * 13 * 379$
19916	$2^2 * 13 * 383$

Table 20: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
20228	$2^2 * 13 * 389$
20644	$2^2 * 13 * 397$
20852	$2^2 * 13 * 401$
21268	$2^2 * 13 * 409$
21788	$2^2 * 13 * 419$
21892	$2^2 * 13 * 421$
22412	$2^2 * 13 * 431$
22516	$2^2 * 13 * 433$
22828	$2^2 * 13 * 439$
23036	$2^2 * 13 * 443$
23348	$2^2 * 13 * 449$
23764	$2^2 * 13 * 457$
23972	$2^2 * 13 * 461$
24076	$2^2 * 13 * 463$
24284	$2^2 * 13 * 467$
24908	$2^2 * 13 * 479$
25324	$2^2 * 13 * 487$
25532	$2^2 * 13 * 491$
25948	$2^2 * 13 * 499$
26156	$2^2 * 13$

Table 21: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
330	$2 * 3 * 5 * 11$
462	$2 * 3 * 7 * 11$
858	$2 * 3 * 11 * 13$
859	859
1122	$2 * 3 * 11 * 17$
1254	$2 * 3 * 11 * 19$
1518	$2 * 3 * 11 * 23$
1914	$2 * 3 * 11 * 29$
2046	$2 * 3 * 11 * 31$
2442	$2 * 3 * 11 * 37$
2706	$2 * 3 * 11 * 41$
2838	$2 * 3 * 11 * 43$
3102	$2 * 3 * 11 * 47$
3498	$2 * 3 * 11 * 53$
3894	$2 * 3 * 11 * 59$

Table 22: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
4026	$2 * 3 * 11 * 61$
4422	$2 * 3 * 11 * 67$
4686	$2 * 3 * 11 * 71$
4818	$2 * 3 * 11 * 73$
5214	$2 * 3 * 11 * 79$
5478	$2 * 3 * 11 * 83$
5874	$2 * 3 * 11 * 89$
6402	$2 * 3 * 11 * 97$
6666	$2 * 3 * 11 * 101$
6798	$2 * 3 * 11 * 103$
7062	$2 * 3 * 11 * 107$
7194	$2 * 3 * 11 * 109$
7458	$2 * 3 * 11 * 113$
8382	$2 * 3 * 11 * 127$
8646	$2 * 3 * 11 * 131$
9042	$2 * 3 * 11 * 137$
9174	$2 * 3 * 11 * 139$
9834	$2 * 3 * 11 * 149$
9966	$2 * 3 * 11 * 151$

Table 23: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
10362	$2 * 3 * 11 * 157$
10758	$2 * 3 * 11 * 163$
11022	$2 * 3 * 11 * 167$
11418	$2 * 3 * 11 * 173$
11814	$2 * 3 * 11 * 179$
11946	$2 * 3 * 11 * 181$
12606	$2 * 3 * 11 * 191$
12738	$2 * 3 * 11 * 193$
13002	$2 * 3 * 11 * 197$
13134	$2 * 3 * 11 * 199$
13926	$2 * 3 * 11 * 211$
14718	$2 * 3 * 11 * 223$
14982	$2 * 3 * 11 * 227$
15114	$2 * 3 * 11 * 229$
15378	$2 * 3 * 11 * 233$
15774	$2 * 3 * 11 * 239$
15906	$2 * 3 * 11 * 241$
16566	$2 * 3 * 11 * 251$
16962	$2 * 3 * 11 * 257$
17358	$2 * 3 * 11 * 263$
17754	$2 * 3 * 11 * 269$
17886	$2 * 3 * 11 * 271$
18282	$2 * 3 * 11 * 277$
18546	$2 * 3 * 11 * 281$
18678	$2 * 3 * 11 * 283$
19338	$2 * 3 * 11 * 293$

Table 24: $P=3, m=-852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
20262	$2*3*11*307$
20526	$2*3*11*311$
20658	$2*3*11*313$
20922	$2*3*11*317$
21846	$2*3*11*331$
22242	$2*3*11*337$
22902	$2*3*11*347$
23034	$2*3*11*349$
23298	$2*3*11*353$
23694	$2*3*11*359$
24222	$2*3*11*367$
24618	$2*3*11*373$
25014	$2*3*11*379$
25278	$2*3*11*383$