3 項完全数の展開
後編 驚異の D 型解

飯高 茂

平成 31 年 8 月 19 日

1 $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1$ の場合

$\sigma(a)$ と $\varphi(a)$ を 1:2 で加重平均をとるとしてみよう． $a=p$ が素数の場合は $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=p+1+2(p-1)-3p=-1$ になるので $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a$ と定義する.

$\Psi_{2,3}(p)=-1$ になるが計算してみると $a=2^e$ でも $\Psi_{2,3}(2^e)=-1$ を満たす.

表 1: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1$ の解

a	素因数分解	a	素因数分解
2	2	4	2^2
3	3	8	2^3
5	5	16	2^4
7	7	32	2^5
11	11	64	2^6
13	13	128	2^7
17	17	256	2^8

とりあえず次の問題を提起する.

注意 1 $\Psi_{2,3}(a)=-1$ を満たす解は *素数または 2 べきになるか*

これは見るからに難しそうなので, 解 a が偶数なら 2 べきになる, を示したい.
しかしこれもできない. さらにやさしくして

問題 1 $a=p^e$ が $\Psi_{2,3}(a)=-1$ を満たすとき, $e=1$ を示せ.

これはやさしい.
計算練習のための問題なら $a=p^eq^f, (p<q:$ 素数$)$ が $\Psi_{2,3}(a)=-1$ の解にならないことを示すもんだいはどうだろうか. これも計算がすごく大変なのさらにやさしい次の課題をしてみたい.

問題 2 $a=2^e q^f (q:2$ より大きい素数$)$ が $\Psi_{2,3}(a)=-m$ を満たすとき, m を e,q で表せ.

$N=2^{e+1}-1, W=q^{f-1}, \overline{q}=q-1, E=2^e, N=2E-1$ を以下で用いる.

1) $e>0$ とする. $a=2^e q^f$ により, $\sigma(a)=\frac{N(q^2W-1)}{\overline{q}}, 2\varphi(a)=2^e\overline{q}q^{f-1}=\overline{q}EW.$
$3a=3EqW$ により

$$-m=\Psi_{2,3}(a)=\frac{(2E-1)(q^2W-1)}{\overline{q}}+\overline{q}EW-3EqW.$$

$\overline{q}$ を乗じて

$$-\overline{q}m=(2E-1)(q^2W-1)\overline{q}+\overline{q}^2EW-3Eq\overline{q}W.$$

この右辺を W の 1 次式とみて $AW+B$ とおく.
$A=(2E-1)q^2+\overline{q}^2E-3Eq\overline{q}, B=-2E+1$ となるので計算して

$$A=E(2q^2+\overline{q}^2-3q\overline{q})-q^2=E(q+1)-q^2.$$

$$-\overline{q}m=AW+B=Aq^{f-1}+B=E(q+1)q^{f-1}-q^{f+1}-2E+1=Eq^f+Eq^{f-1}-q^{f+1}-2E+1.$$

ここで, $E(q^f-1)+E(q^{f-1}-1)-(q^{f+1}-1)$ を $-\overline{q}$ で割ると,

$$m=\sigma(q^f)+-2^e\sigma(q^{f-1})-2^e\sigma(q^{f-2}).$$

2) $e=0$ とする. $a=q^f$ により, $\sigma(a)=\frac{q^2W-1}{\overline{q}}, 2\varphi(a)=2\overline{q}q^{f-1}=2\overline{q}W.$

$$-m=\frac{q^2W-1}{\overline{q}}+2\overline{q}W-3qW.$$

$\overline{q}$ を掛けると

$$-m\overline{q}=q^2W-1+2\overline{q}^2W-3q\overline{q}W=(2-q)W-1=2q^{f-1}-q^f-1.$$

$2q^{f-1}-q^f-1=q^{f-1}-q^f+q^{f-1}-1=q^{f-1}(1-q)+q^{f-1}-1$ と変形すると

$$m=q^2W-1+2\overline{q}^2W-3q\overline{q}W=(2-q)W-1=q^{f-1}-\sigma(q^{f-2}).$$

1.1 $f = 1$ の場合

$f = 1$ とおくとき, $a = 2^e q$ なので A 型解の場合である.

$$E(q^f - 1) + E(q^{f-1} - 1) - (q^{f+1} - 1) = 2^e(q-1) - (q^2 - 1) = \overline{q}(2^e - q - 1) = -m\overline{q}.$$

よって, $2^e - q - 1 = -m$.
一方, $q = 2^e - 1 + m$ は素数なので, $2^{e-1}q$ は平行移動 m の完全数でその 2 倍が $a = 2^e q$.

注意 2 $X = \sigma(q^{f-2}), Y = \sigma(q^{f-1}), Z = \sigma(q^f)$ とおくとき定義から $Y = X + q^{f-1}, Z = Y + q^f$.
これを用いると,
$-m = 2^e Y + 2^e X - Z = 2^e q^{f-1} + 2 * 2^e X - (X + q^{f-1} + q^f)$.

2 $\Psi_{2,3}(a) = 0$ の場合

$m = 0$ のとき, すなわち $\Psi_{2,3}(a) = 0$ の解は非常に興味深い.
このときの解を, 平行移動のない完全数と考えて 3 項完全数という. あるいは新世代完全数または 3 頭完全数 (perfect numbers with three heads) という.
また $\sigma(a) + 2\varphi(a) = 3a$ を 3 項完全数の定義式という.

定義 1 与えられた m に対して,$\Psi_{2,3}(a) = -m$ を満たすとき, a を平行移動 m の *(2,3)* 型 *3* 項完全数という.

$m = 0$ の場合は完全数の 2 倍解が多数出てくる.
1000 万以下に限って解を求めてみた.
(A 型解) は完全数の 2 倍.
(D 型解) はかなり多い.
(F 型解) は次の 2 つ.

1. $a = 275 = 2 * 3^4 * 17$
2. $a = 2156 = 2^2 * 7^2 * 11$.

2.1 A 型解

(A 型解) $a = 2^e q$, $(2 < q:$ 素数$)$ の場合. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき
$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2\varphi(a) = 2^e(q-1) = \frac{N+1}{2}(q-1)$ により,
$\sigma(a) - 3a + 2\varphi(a) = N(q+1) - 3 * \frac{N+1}{2}(q-1) + \frac{N+1}{2}(q-1) = 0$
これより $-q + \frac{N-1}{2} = 0$. 結局, $q = 2^e - 1$ は素数になる. このとき, $\alpha = 2^{e-1}q$ は完全数で, $a = 2\alpha$.
すなわち (A 型解) $a = 2^e q$ は完全数の 2 倍となっている.

図 1: 3 匹のエテコウ (3 項完全数のシンボルキャラクター); By Jun Iitaka

表 2: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = 0$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$(A 型解)
56	$2^3 * 7$
992	$2^5 * 31$
16256	$2^7 * 127$
260	$2^2 * 5 * 13$ (D 型解)
1976	$2^3 * 13 * 19$
25232	$2^4 * 19 * 83$
41072	$2^4 * 17 * 151$
133984	$2^5 * 53 * 79$
145888	$2^5 * 47 * 97$
1100864	$2^6 * 103 * 167$
1270208	$2^6 * 89 * 223$
1439552	$2^6 * 83 * 271$
2237888	$2^6 * 73 * 479$
4729664	$2^6 * 67 * 1103$
2754	$2 * 3^4 * 17$ (F 型解)
2156	$2^2 * 7^2 * 11$ (F 型解)

2.2 D 型解

(D 型解) $a = 2^e pq$, $(2 < p < q, p, q:$ 素数) の場合. $N = 2^{e+1} - 1, B = pq, \Delta = p + q$ を用いると $a = 2^e pq$ に対して, $B = pq, \Delta = p + q$ とおくとき

$\sigma(a) = \sigma(2^e qp) = N(p+1)(q+1) = N(B + \Delta + 1)$

$2\varphi(a) = 2\varphi(2^e qp) = \frac{N+1}{2}(p-1)(q-1) = \frac{(N+1)(B-\Delta+1)}{2}$. $\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = 0$, により

$$-B + \frac{N-1}{2}\Delta + \frac{3N+1}{2} = 0.$$

$u = 2^e$ とおくとき, $B = (u-1)\Delta + 3u - 1$.

$\mathrm{p}_0 = p - u + 1, q_0 = q - u + 1, B_0 = p_0 q_0$ とおくと, p_0, q_0 はともに偶数である. また $B_0 = p_0 q_0 = B - (u-1)\Delta + (u-1)^2$ となるので, $B = B_0 + (u-1)\Delta - (u-1)^2$.

$B_0 + (u-1)\Delta - (u-1)^2 = B = (u-1)\Delta + 3u - 1$ により, $B_0 = (u-1)^2 + 3u - 1 = u(u+1)$.

$\Theta = u(u+1)$ とおくとき $B_0 = p_0 q_0 = \Theta$.

2.3 アルゴリズムで D 型解を求める

そこで次のアルゴリズムで D 型解 が求める.

与えられた $e > 0$ に対して, $u = 2^e, \Theta = u(u+1)$ とおく. $p_0 q_0 = \Theta$ と 2 因子に分解する. $p = p_0 + u - 1, q = q_0 + u - 1$ がともに素数なら $a = 2^e pq$ が解になる.

$u + 1 = 2^e + 1$ は奇数なので, p_0, q_0 はともに偶数である.

例 1. $e = 2$ とすると, $u = 4, u - 1 = 3, \Theta = u(u+1) = 20$. これを 2 つの偶数の積に分解する. $p_0 = 2, q_0 = 10$.

$p = p_0 + 3 = 5, q = q_0 + 3 = 13$. ゆえに, $a = 2^e pq = 260$.

次の結果はアルゴリズムに基づいて prolog で書いたプログラムを用いた.

表 3: D 型解

a	$a = 2^e pq$
4729664	$2^6 * 67 * 1103$
2237888	$2^6 * 73 * 479$
1439552	$2^6 * 83 * 271$
1270208	$2^6 * 89 * 223$
1100864	$2^6 * 103 * 167$
2181070592	$2^8 * 257 * 33151$
75398912	$2^8 * 383 * 769$
1192258048	$2^9 * 587 * 3967$
629225984	$2^9 * 739 * 1663$
558585344	$2^9 * 853 * 1279$
538178048	$2^9 * 967 * 1087$
112107969536	$2^{10} * 1033 * 105983$
15974122496	$2^{10} * 1103 * 14143$
13246297088	$2^{10} * 1123 * 11519$
7853499392	$2^{10} * 1223 * 6271$
5257665536	$2^{10} * 1433 * 3583$
4534854656	$2^{10} * 1663 * 2663$

A,D 型解以外の解が 最初に示した 2 つの F 型解以外にあるかどうかは不明.

3　平行移動した場合

平行移動 m の場合も同じような結果が出る.

(A 型解) $a = 2^e q$, $(2 < q:$ 素数$)$ の場合. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくときに $\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2\varphi(a) = 2^e(q-1) = \frac{N+1}{2}(q-1)$ により,

$\sigma(a) - 3a + 2\varphi(a) = N(q+1) - 3 * \frac{N+1}{2}(q-1) + \frac{N+1}{2}(q-1) = -m$

これより $-q + \frac{N-1}{2} = -m$. 結局, $q = 2^e - 1 + m$ は素数になる. このとき, $\alpha = 2^{e-1}q$ は m だけ平行移動した完全数で, $a = 2\alpha$.

すなわち A 型解 $a = 2^e q$ は m だけ平行移動した完全数の 2 倍となっている.

(D 型解) $a = 2^e pq$, $(2 < p < q, p, q:$ 素数$)$ の場合. $N = 2^{e+1} - 1, B = pq, \Delta = p + q$ を用いると

$\sigma(a) = \sigma(2^e qp) = N(p+1)(q+1) = N(B + \Delta + 1)$,

$2\varphi(a) = 2\varphi(2^e qp) = \frac{N+1}{2}(p-1)(q-1) = \frac{(N+1)(B-\Delta+1)}{2}$ これより

$$-m = N(B + \Delta + 1) + \frac{(N+1)(B - \Delta + 1)}{2} - 3\frac{N+1}{2}B = -B + \frac{N-1}{2}\Delta + \frac{3N+1}{2}.$$

$u = 2^e$ とおくとき, $-m = -B + (u-1)\Delta + 3u - 1$.

よって, $B = (u-1)\Delta + 3u - 1 + m$.

$p_0 = p - u + 1, q_0 = q - u + 1, B_0 = p_0 q_0$ とおくと, $B_0 = p_0 q_0 = B - (u-1)\Delta + (u-1)^2$ となる.

$B - (u-1)\Delta = 3u - 1 + m$ を代入して,

$$B_0 = p_0 q_0 = B - (u-1)\Delta + (u-1)^2 = 3u - 1 + m + (u-1)^2 = m + u(u+1).$$

$\Theta = u(u+1) + m$ とおくとき $B_0 = p_0 q_0 = \Theta$.

p_0, q_0 は偶数なので積 $B_0 = p_0 q_0$ は 4 の倍数. $e = 1$ を除くと, u は 4 の倍数. したがって, $\Theta = u(u+1) + m$ も 4 の倍数. m も 4 の倍数.

m が 4 の倍数でないなら D 型解はない.

3.1　アルゴリズムで D 型解を求める

次のアルゴリズムで D 型解 が求まる.

与えられた $e > 0$ に対して, $u = 2^e, \Theta = u(u+1) + m$ とおく. $p_0 q_0 = \Theta$ と 2 因子に分解する. $p = p_0 + u - 1, q = q_0 + u - 1$ がともに素数なら $a = 2^e pq$ が解になる.

$m = -4, e = 2$ とすると, $u = 4, u-1 = 3, \Theta = u(u+1)+m = 16 = 2*8$. $p_0 = 2, q_0 = 8$ とすると,$p = 5, q = 11$.

$m = -8, e = 3$ とすると, $u = 8, u-1 = 7, \Theta = u(u+1) + m = 64 = 4*16$. $p_0 = 4, q_0 = 16$ とすると,$p = 7, q = 23$.

$m = 16, e = 3$ とすると, $u = 8, u-1 = 7, \Theta = u(u+1) + m = 88 = 4*22$. $p_0 = 4, q_0 = 22$ とすると,$p = 11, q = 29$.

後半の 2 個の D 型解はアルゴリズムで見いだした.

表 4: $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-m$,D 型解

a	素因数分解
$m=-2$	D 型がない
$m=-4$	
220	2^2*5*11
$m=16$	
2552	$2^3*11*29$
71414912	$2^7*131*4259$
816915617792	$2^{11}*2069*192791$

プログラムができると結果がたくさん出る．とくに解が多かったのは $m=-64$ の場合だった.

表 5: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=64$,D 型解

a	素因数分解
20368	$2^4*19*67$
15088	$2^4*23*41$
4661056	$2^6*67*1087$
1032256	$2^6*127*127$
2178965248	$2^8*257*33119$
302687488	$2^8*271*4363$
81518848	$2^8*359*887$
67679488	$2^8*463*571$
8934017609728	$2^{12}*4127*528509$
942967779328	$2^{12}*4447*51769$
279590883328	$2^{12}*7247*9419$

こうして数値例はいろいろでるが, 驚異の姿というほどのことは無い.

3 項完全数については, 完全数のときと同様に,3 項宇宙完全数,3 項スーパー完全数などが考えられその研究は現在進行中である．乞うご期待.