数学の研究をはじめよう
メルセンヌの完全数
前編 概完全数予想の深化

飯高 茂

平成 31 年 3 月 4 日

1 スーパー 完全数

$a=2^e$ は $\sigma(a)=2a-1$ を満たす. そこで, 一般に $\sigma(a)=2a-1$ を満たす a を概完全数 (almost perfect number) とよぶ.

この逆が言えるか, すなわち概完全数が 2^e に限るか? これはよく知られた難問である.

$p=2^{e+1}-1$ を素数とするとき, $\alpha=2^e p$ はユークリッドの完全数である. ユークリッドの完全数の 2 べき部分 $a=2^e$ とするとき, これは $\sigma^2(a)=2a$ を満たす.

そこで一般に $\sigma^2(a)=2a$ を満たす a をスーパー 完全数という.

スーパー 完全数 a が偶数なら a は 2 べき, すなわち $a=2^e$, さらに $p=2^{e+1}-1$ は素数となることを D.Suryanaryana は 1969 年に証明しスーパー 完全数の展開へ口火を切った.

与えられた整数 m について $\sigma(a)=2a-m$ を満たす a を m だけ平行移動した完全数という.

完全数の平行移動を考えることは意味のある発展をもたらした.

たとえば $\sigma(a)=2a-m$ を満たす解は $a=2^e q, q$:(素数), と書けるとき A 型解という. このとき, $q=2^{e+1}-1+m$ は素数になる.

このときの $a=2^e$ は m だけ平行移動した完全数となる.

スーパー 完全数においてもその平行移動を考えることはスーパー双子素数を量産することなど重要な副産物をもたらした.

与えられた整数 m について $p=\sigma(2^e)+m=2^{e+1}-1+m$ を奇素数とする. したがって, m は偶数になる.

$a=2^e$ の満たす方程式を考える.

$p=\sigma(a)+m=2^{e+1}-1+m$ は素数であると仮定したので

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=p+1=2^{e+1}+m=2a+m$.

$a=2^e$ であったことを忘却の彼方におき次の式を a, A を未知自然数とする連立方程式とみなし, その解 a を 平行移動 m のスーパー 完全数という.

$$A=\sigma(a)+m, \sigma(A)=2a+m.$$

$m=0$ だとこれをまとめて $\sigma(a)=2a$ となる．a が偶数ならこの解は 2^e となりスーパー 完全数と呼ばれ, $2^e p$ は元祖完全数となる.

スーパー 完全数は元祖完全数の平方根にごく近いので, パソコンで定義式に沿って計算しスーパー 完全数 $a=2^e$ を求めることは容易．$p=2a-1$ は計算がすぐできて積 $2^e p$ は元祖完全数.

このような関係があり, スーパー 完全数は平行移動も含めて考えるとき, m だけ平行移動した完全数が A 型の場合の 2 べき部分を拡大研究したものと言えるであろう.

2　スーパー メルセンヌ完全数

ユークリッドの完全数の 2 べき部分は大切であることが分かったが, 残りの素数部分 $p=2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数と呼ばれている. これは 巨大な素数の構成に重要な役を演じ続けている.

私は, ユークリッドの完全数の素数部分であるメルセンヌ素数 $p=2^{e+1}-1$ を取り出して理論が作れないか考えたことが何回かある．その度に, こんなことを考える自分はどうかしていると自虐的になった.

しかし今回改めて考え直してみたら案外うまく行った．しかも重要な産物がえられた. それはゴジラみたいな完全数である.

スーパー メルセンヌ完全数を定義するために $a=p=\sigma(2^e)+m=2^{e+1}-1+m$ を奇素数とする．したがって, m は偶数になる.

読者は $a=2^e$ の代わりに $a=p=\sigma(2^e)+m$ としている点に注意してほしい.

すると $\sigma(a)=p+1=2^{e+1}+m$ となるので $\sigma(a)-m=2^{e+1}$.

ここで パートナー を次のように導入する．$A=\sigma(a)-m$ とおくのである．すると $A=2^{e+1}$.

$\sigma(A)=2^{e+2}-1$, $a+1-m=2^{e+1}$ を使うと,

$\sigma(A)=2^{e+2}-1=2(a+1-m)-1=2a-2m+1$.

そこで得られた次式を スーパーメルセンヌ完全数 a の連立定義式という.

$$A=\sigma(a)-m, \sigma(A)=2a-2m+1$$

その解 a をスーパーメルセンヌ完全数．また A をそのパートナーという．さらに $B=\sigma(A)-1$ をシャドウという.

命題 1 a が素数になる必要十分条件は $A=2^e$.

Proof.

$A=\sigma(a)-m$, $\sigma(A)=2a-2m+1$, により

$2A-\sigma(A)=(2\sigma(a)-2m)-(2a-2m+1)=2(\sigma(a)-a)-1$.

a が素数なら $\sigma(a)-a=1$ により,$2A-\sigma(A)=1$.

ここで概完全数の予想を使うと, $A=2^e$.

逆に $A=2^e$ なら $2A-\sigma(A)=1$ により, $\sigma(a)-a=1$. よって a は素数.

End

3　スーパーメルセンヌ完全数とスーパー完全数

スーパー完全数の定義式

$A = \sigma(a) + m, \sigma(A) = 2a + m.$

とスーパーメルセンヌ完全数の定義式

$A = \sigma(a) - m, \sigma(A) = 2a - 2m + 1$

を比べてみるとほとんど同じである. m の符号が入れ替わったのは不注意のなせる業だ.

$m = 0$ の場合が基本的である. その場合は 1 つにまとめて スーパー完全数の定義式 は $\sigma^2(a) = 2a$ となり解は 2 べき, すなわち $a = 2^e$.

スーパーメルセンヌ完全数は 1 つにまとめると $\sigma^2(a) = 2a + 1$ となり解は $a = 2^{e+1} - 1$ とかける素数になるはずである.

ただし証明はできていない. スーパー完全数の場合は a : 偶数なら証明はできている (Suryanaryana).

しかし スーパーメルセンヌ完全数の場合は A : 偶数を仮定しても (私は) 証明できない.

4　計算例

いろいろな m 　について平行移動 m 　のスーパーメルセンヌ完全数を計算してみた. a が素数なら $A = 2^e$ になる場合が標準的である. a が素数でない場合を $*$ で印した.

表 1: $P = 2, m = -18$ Super Mersenne perfect numbers

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -14$					
17	17	32	2^5	62	$2 * 31$
113	113	128	2^7	254	$2 * 127$
241	241	256	2^8	510	$2 * 3 * 5 * 17$
1009	1009	1024	2^{10}	2046	$2 * 3 * 11 * 31$
185 $*$	$5 * 37$	242	$2 * 11^2$	398	$2 * 199$
$m = -13$					
2	2	16	2^4	30	$2 * 3 * 5$
$m = -12$					
3	3	16	2^4	30	$2 * 3 * 5$
19	19	32	2^5	62	$2 * 31$
499	499	512	2^9	1022	$2 * 7 * 73$
8179	8179	8192	2^{13}	16382	$2 * 8191$

a が素数にならないものに興味がある.

$m = -14$ のとき $a = 18 = 5 * 37$, がありこのとき $A = 242 = 2 * 11^2, B = 62 = 2 * 31.$

平行移動したスーパーメルセンヌ完全数において, a が素数なら 平行移動したメルセンヌ素数と呼ぶことは差しさわりがない. a が素数でないなら, a を 裏の メルセンヌ完全数と呼んでもいいと思う.

表 2: スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-10$					
$18*$	$2*3^2$	49	7^2	56	2^3*7
5	5	16	2^4	30	$2*3*5$
53	53	64	2^6	126	$2*3^2*7$
1013	1013	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
$m=-9$					
$51*$	$3*17$	81	3^4	120	2^3*3*5
$53*7$	$3*179$	729	3^6	1092	$2^2*3*7*13$
$4911*$	$3*1637$	6561	3^8	9840	$2^4*3*5*41$

$m=-10$ のときは $a=18=2*3^2$ という非素数の解がある.

5　変な奴

スーパーメルセンヌ完全数は本来の定義に基づけば m が偶数の場合にのみ考えるべきである. 実際, m が偶数だと解は素数の場合が多く, これは平行移動 m のメルセンヌ完全素数というべきものである.

しかしながら m が奇数の場合も考える. m が奇数の場合にパソコンで計算してみるとわずかな解があるだけのようだ. 私はここで, 冥王星の研究を想起する. 冥王星に探査機を飛ばして近くから眺めると, 実にさまざまな風景がありいくら研究しても追いつかない豊富な世界だった.

$m=-9$ には $a=3p, p(\neq 2,3)$: 素数, $A=3^e$ となる解が 3 個ありここには不思議な法則がありそうだ.

そこで $A=\sigma(a)-m, \sigma(A)=2a-2m+1$ に $m=-9$ を代入する.

$A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19.$

$a=3p$ と $A=3^e$ を代入する.

$A=\sigma(a)+9=4p+13=3^e$ をえる.

命題 2 $4p+13=3^e$ を満たすとき $a=3p,(p\neq 2,3)$ は $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ となる.

Proof.

$A=\sigma(a)+9=4p+13=3^e$, よって $2\sigma(A)=3^{e+1}-1$.

End

$\dfrac{3^e-13}{4}$ が素数 p になる場合は解である.

こうして解があらたに発見された. $\dfrac{3^e-13}{4}$ が素数 p になる e は無限にありそうな気がする.

命題 3 $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ を $a=3p$ を仮定して $A=3^e$ を導く. ただし仮説を使う.

Proof.

$a=3p$ を代入すると, $A=\sigma(a)+9=4p+13, \sigma(A)=2a+19=6p+19.$

$A-13=4p, \sigma(A)-19=6p$ により $(12p=)3A-39=2\sigma(A)-38.$

これより, $3A-1=2\sigma(A)$. 次の仮説を使う.

$\dfrac{3^e-13}{4}$ が素数 p になる場合は解である.

こうして解があらたに発見された.

命題 4 $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ を $a=3p$ を仮定して $A=3^e$ を導く. ただし仮説を使う.

表 3: $m=-9$ の解 $a=3p, A=3^e$

e	$3*p$
4	$68=3*17$
6	$716=3*179$
8	$6548=3*1637$
10	$59036=3*14759$
12	$531428=3*132857$
88	$3*242443432446880900719205485541020203890037$

Proof.
$a=3p$ を代入すると, $A=\sigma(a)+9=4p+13, \sigma(A)=2a+19=6p+19$.
$A-13=4p, \sigma(A)-19=6p$ により $(12p=)3A-39=2\sigma(A)-38$.
これより, $3A-1=2\sigma(A)$. 次の仮説を使う.

注意 1 素数 p について $(p-1)\sigma(a)=ap-1$ が成り立てば a は p のべき.

ただし, $p=2,3$ には反例が知られていないが,100 万以下では次の反例がある.

- $p=5$ のとき $a=7*11$
- $p=7$ のとき $a=97783=7*61*229$
- $p=11$ のとき $a=611=13*47$
- $p=17$ のとき $a=1073=29*37$
- $p=17$ のとき $a=2033=19*107$

6 底が一般の場合のスーパーメルセンヌ完全数

奇素数 P を固定し, これを底とみなして $a=p=\sigma(P^e)+m$ が素数と仮定する. すると, $\sigma(a)=a+1$.
$\sigma(P^e)=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ により $a=p=\sigma(P^e)+m=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}+m$ なので,

$$\sigma(a)=a+1=\frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}}+m$$

これより

$$\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P=P^{e+1}.$$

そこで, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ とおくと, $A=P^{e+1}$.

表 4: スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-1$					
2	2	4	2^2	6	$2*3$
14	$2*7$	25	5^2	30	$2*3*5$
$m=0$					
3	3	4	2^2	6	$2*3$
7	7	8	2^3	14	$2*7$
31	31	32	2^5	62	$2*31$
127	127	128	2^7	254	$2*127$
8191	8191	8192	2^{13}	16382	$2*8191$
131071	131071	131072	2^{17}	65537	65537
147455	$5*7*11*383$	221184	$2^{13}*3^3$	73729	$17*4337$
524287	524287	524288	2^19	262145	$5*13*37*109$

それゆえ、
$\overline{P}\sigma(A)=P^{e+2}-1.$
$\overline{P}(a-m)+1=P^{e+1}$ を使うと,

$$\overline{P}\sigma(A)+1=P^{e+2}=P\overline{P}(a-m)+P.$$

$$\overline{P}\sigma(A)=P\overline{P}(a-m)-\overline{P}^2+\overline{P}.$$

よって, $\overline{P}$ を払うと

$$\sigma(A)=P(a-m)-\overline{P}+1.$$

$A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $\sigma(A)=P(a-m)-\overline{P}+1$ を連立させて, この解 a をスーパー メルセンヌ完全数といい A をそのパートナ,$B=\sigma(A)-1$ をシャドウという.

スーパー メルセンヌ完全数において a が素数のとき A が P べきとなる対応関係を調べる.

スーパー メルセンヌ完全数の定義式 $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $\sigma(A)=P(a-m)-\overline{P}+1$ を元に計算を実行する.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(A)-PA&=\overline{P}(P(a-m)-\overline{P}+1)-P(\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P)\\&=\overline{P}(P(a)-\overline{P}+1)-P(\overline{P}(\sigma(a))+2-P)\\&=\overline{P}P(a+1-\sigma(a))-1.\end{aligned}$$

$$\overline{P}\sigma(A) - PA = \overline{P}P(a+1-\sigma(a)) - 1.$$

補題 1 a が素数のとき $\overline{P}\sigma(A) - P = -1$ を満たす．その逆も正しい．

Proof

a が素数のとき $a+1-\sigma(a)$. よって上の式より $\overline{P}\sigma(A) - PA = -1$.

End.

$\overline{P}\sigma(A) - PA = -1$ なら $A = P^e$ となるだろう，というのが一般化された概完全数予想である．

$P = 2, 3$ では反例が発見されていない．しかし $P = 5, 7, 11$ なら反例がある．

7　$P=3$ のスーパーメルセンヌ完全数

表 5: $P=3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-3$					
37	37	81	3^4	120	2^3*3*5
$m=-2$					
2	2	9	3^2	12	2^2*3
11	11	27	3^3	39	$3*13$
1091	1091	2187	3^7	3279	$3*1093$
9839	9839	19683	3^9	29523	$3*13*757$
$m=-1$					
3	3	9	3^2	12	2^2*3

7.1　$P=5$ スーパーメルセンヌ完全数

表 6: $P=5$ スーパーメルセンヌ完全数

$P=5$					
$m=-17$					
2	2	77	$7*11$	95	$5*19$
139	139	625	5^4	780	$2^2*3*5*13$
3889	3889	15625	5^6	19530	$2*3^2*5*7*31$
$m=-16$					
3	3	77	$7*11$	95	$5*19$
$m=-14$					
5	5	77	$7*11$	95	$5*19$
17	17	125	5^3	155	$5*31$
4037	$11*367$	17717	$7*2531$	20255	$5*4051$
47585	$5*31*307$	236597	$197*1201$	237995	$5*47599$

1. $m=-17$ のとき $a=2, A=77=7*11$. 素数 $a=2$ に対し A の値に 77 が現れた. 7 のべきではないにもかかわらず.
2. $m=-16$ のとき $a=3, A=77=7*11$. 素数 $a=2$ に対し A の値に 77 が現れた.
3. $m=-14$ のとき $a=5, A=77=7*11$. 素数 $a=2$ に対し A の値に 77 が現れた.

このことを計算で確認してみよう.

スーパー メルセンヌ完全数の定義式 に $P=5$ を代入する.

$\sigma(A)=8*12=96,$ なので $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P=4(\sigma(a)-m)-3=77$ と $\sigma(A)=5(a-m)-3=96$. $A=77$ に対応するので a は素数.

$4(\sigma(a)-m)=80$ より $a-m=20-1=19$. したがって, $a=19+m$ が素数になれば, a こそパートナーが 77 になるスーパー メルセンヌ完全数である.

$m=-17$ のとき $a=2$; $m=-16$ のとき $a=3$; $m=-14$ のとき $a=5$.

$P=7$ のスーパーメルセンヌ完全数をみてみよう.

表 7: $P=7$ スーパーメルセンヌ完全数

$P=7$					
a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-26$					
31	31	343	7^3	399	$3*7*19$
159943	$7*73*313$	1115479	$277*4027$	1119783	$3*7*53323$
$m=-25$					
19583	19583	117649	7^6	137256	$2^3*3*7*19*43$
$m=-24$					
1673	$7*239$	11659	$89*131$	11879	$7*1697$
2777	2777	16807	7^5	19607	$7*2801$
16273	16273	97783	$7*61*229$	114079	$7*43*379$

$m=-24$ のとき素数 $a=16273$ のパートナー $A=97783=7*61*229$ は 7 のべきではない. これこそ $P=7$ での一般化された概完全数予想の反例なのだ.

$\sigma(a)=2a-1$ を満たす数を概完全数と呼ぶことを私は wiki を通じて知った.2 べき, すなわち 2^e で書ける数しか知られていない. 奇数完全数の問題と同じように解決困難なことで有名である. これを底が P の場合に考えてみたが $P=5,7,11,$ などで反例のあることがわかった.

今回の研究ではスーパーメルセンヌ数の研究において一般化された概完全数予想が重大な意味を持つことがわかった. 一般の場合では反例を決定することが望ましい. 決定できなくても有限個かどうかを知りたい. 概完全数予想の深化と呼んでもいいだろう.