2018 年 6 月 13 日水曜日

放送大学多摩数学クラブ発表

ゲーデルのプラトニズムに基づくよりエレガントな数学の書き方

畔上耕介

1. ゲーデルの第 1 不完全性定理

ゲーデルの数学の哲学について見るため、まず第 1 不完全性定理についてざっと復習してみましょう。

クルト・ゲーデル Kurt Gödel (1906-1978) は、オーストリア＝ハンガリー帝国に生まれ、ドイツ語を母語として育った人で、ウィーン大学で数学を修め、後にアメリカに移住してプリンストン高等研究所に勤め、その地で亡くなりました。主として数学基礎論及び数学の哲学に関して重要な業績を残しました。ウィーンでは、信条は合わないながらも論理実証主義者たちと親交を結び、その中にはユダヤ人も多くいたことなどから、ナチスに迫害され、アメリカへ渡ったのでした。

20 世紀の初めごろの数学界では、ドイツの数学者ヒルベルトによって、数学の全体を、公理を出発点とする論証体系の形で基礎づけようという動き、形式主義 (formalism) があり、その一環として、1 階述語論理の完全性と、それに自然数の公理を付け加えて得られる理論（自然数論）の完全性及び無矛盾性が証明されることが望ましいとされていました。**「完全性」**(completeness) とは（詳しく分類すれば 2 つか 3 つの種類に分かれるのですが、簡単に言うと）、**ある分野に関する、公理から始まる演繹的理論体系（公理系）について、その分野の恒真な命題がすべてその理論から形式的に導出できる（論証できる）こと**を言います。標語的に言い換えれば、**「意味論を統語論で記述し尽せる」ことを「完全」というのです。**

ゲーデルは、1929 年に提出した博士論文「論理計算の完全性について」[1]によって、1 階述語論理の完全性の問題を肯定的に解決しましたが、その段階で既に、それに自然数の公理を付け加えたら完全性は成り立たなくなることを確信していました。そして 1931 年に発表した「『プリンキピア・マテマティカ』及びその関連体系における形式的に決定不可能な命題について I」[2]では、自然数論の不完全性を意味する第 1 不完全性定理を証明し、さらに自然数論の公理系が自身の無矛盾性を証明できないことを意味する第 2 不完全性定理の証明の概略が示されています。論文のタイトルの末尾に「I」がついているのは、後で第 2 不完全性定理のきちんとした証明などを続きとして書くつもりだったからですが、それは他の研究者たちがはっきりさせてしまったので必要なくなり、ゲーデルが「II」を書くことはありませんでした。

今日第 1 不完全性定理と呼ばれるのは、その論文の定理 VI で、

<u>定理 VI</u>：
任意の ω-無矛盾で再帰的な論理式のクラス κ に対して、再帰的**クラス符号** r が存在して、$v\ \mathrm{Gen}\ r$ も $\mathrm{Neg}\ (v\ \mathrm{Gen}\ r)$ も $\mathrm{Flg}\ (\kappa)$ に属さない。（ここで、v は r の唯一の**自由変項**である。）[3]

というものです。ここに出てくる記号には、原論文で定義を説明するだけのために何十ページも要しているものが含まれますが、それを敢えて分かり易く言い換えると、この文全体は次のような意味になります。

ゲーデルの第 1 不完全性定理：
自然数論の公理系における任意の ω-無矛盾な論理式の証明系列には、肯定もその否定もその証明系列のな

[1] Gödel, K. (1929) „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls.“ 現在では Feferman, Solomon, et al. (eds.). (1986: 60-101) *Kurt Gödel Collected Works Volume I Publications 1926-1936* (Oxford University Press: New York). として読むことができます。

[2] Gödel, K. (1931) „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I.“ In Feferman, Solomon, et al. (eds.). (1986: 144-195).

[3] Gödel (1931) in Feferman et al. (1986: 172) より翻訳、引用。

かでは証明できないような論理式が存在する。

となります。踏み込んで解釈すれば、「論理式の集合の論理的関係を整理して、演繹の出発点になる論理式、すなわち公理を特定する。この論理式の集合が矛盾を含まないとしても、公理からの証明という統語論的手段では真偽の決定できない論理式が、その集合の中にある。」ということになります。これは言い換えると、「意味論 semantics には統語論 syntax を超えるものがある。」ということに他なりません。

ここで、「ω-（無）矛盾」という特徴的な概念が使われているのが目につきます。これはゲーデルがこの定理のために考え出した概念で、私が問題にしたいのはその言語学的意味とでも言うべきことなのですが、ともかく数学的には、次のように定義されます。

ω-矛盾（オメガむじゅん）:

自然数を項とする述語論理の論理式 $\varphi(x)$ から成る理論 T について、次の 2 つのことが同時に満たされるとき、T は ω-矛盾するという。

・$\varphi(x)$ を満たす x がある。

・$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \cdots$は成り立たない。[4]

一見するとこの定義に出てくる 2 つの条件自体が矛盾しているように見えますが、自然数でつけた番号の通りに並んでいる対象の列が、外から数えられる限りでは規則性φが成り立たないように並んでいるように見えても、可算無限個の対象よりさらに向こうの対象では $\varphi(x)$ を満たす x が現れるようになっている、対象を並べた人物・主体が、そのような規則性を念頭においていたというように考えると、これらの条件はぎりぎりで両立します。なお、「ω-無矛盾」は「ω-矛盾」の否定です。また、ω というのは元々最初の**超限順序数**、標語的に言えば「自然数最後の数は何番目かを表す数」に用いられる記号です。[5]

「ω-矛盾」は弱い意味の矛盾であり、その否定及び普通の矛盾及びその否定との間に次の図のような強弱の順序関係があります。特に、「無矛盾」と「ω-矛盾」とが両立する状況があることが、言語学の議論にとってはポイントになります。

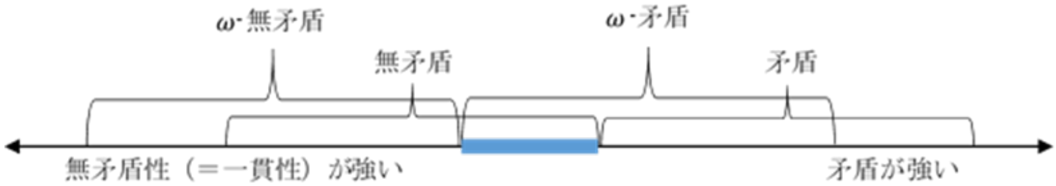

図１　ω-矛盾と普通の矛盾の強弱関係

強い意味の無矛盾、つまり徹底的な無矛盾であるω-無矛盾を定理の条件部分に持ってきたので、ゲーデルの証明した形での第 1 不完全性定理は、主張のやや弱い定理になっています。後の 1936 年に、ロッサー (J. B. Rosser) という人がこの定理の条件を単なる無矛盾に弱めたものを証明したので、定理全体は強くなり、ゲーデルの考えた ω-矛盾という見たところ不思議な概念は、数理論理学の教科書には必ず出てくるものの、数学の世界では余り必要ないものとなったようです。[6]私は、それはもったいないと思うのですが、その詳細は言語学の問題になり、今日の話のテーマからそれるのでここでは割愛します。

2. ゲーデルのプラトニズム

4　田中一之編 (2007: 81) 『ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック） 3』東京大学出版会. の説明を要約。

5　「ω」 の正確な定義として、松坂和夫 (1968: 117) 『集合・位相入門』岩波書店. を参照しています。

6　林晋・八杉満利子訳・解説 (2006: 294) 『ゲーデル　不完全性定理』岩波文庫. には、「ω-無矛盾性という中途半端な条件」という言葉が見えます。

さて次に、ゲーデルの哲学的主張である、**プラトニズム（概念実在論）**について簡単にご説明します。その基本的内容は、次の 2 点にまとめられます。

数学のプラトニズム：

a. 存在論的主張：数学的対象は人間の認識から独立に実在する。
b. 認識論的主張：人間には、数学的対象を捉えるための、知覚に類する力であるところの、数学的直観が備わっている。

これに対し、20 世紀に支配的で、現在でもチョムスキーなどが合理的な世界観として奉じている考え方に、**自然主義** (naturalism) というものがあります。[7]

これは、すべてのものが 1 つの自然の一部であり、そこで起こる事柄を説明する場合、その原因も同じ 1 つの自然の中に求められなくてはならないという考え方です。ゲーデルの考える数学的対象の世界は、こうした意味での自然の中には含まれないので、ゲーデルはこの意味では自然主義者ではありません。ゲーデルの議論の少し前からある、数学を自然主義の世界観の中に位置づける試みとして、カルナップ (Rudolf Carnap: 1891-1970) などが唱えた**規約主義** (conventionalism) があります。簡単に言いますと、**規約主義というのは、数学的真理は、我々が一群の用語の使用法について取り決めた規約から論理的に生成される命題群であって、我々の認識から独立な対象の関与して来ない存在である**、という考え方です（大まかに言うならヒルベルトの形式主義と等しいと見ていいでしょう）。こう考えた場合、数学は自然の中で、空気のように透明な存在となり、なぜ数学は自然科学の研究において有用なのかということを説明するのに、自然以外の「余計な」存在者を措定する必要がなくなります。

これに対し、ゲーデルは、規約主義を次のように批判します。もし規約主義の言う通りに、数学的命題が、統語論、すなわち、恣意的に決められた公理や定義とそれに機械的に推論規則を適用したものから成るのだとすると、第 1 不完全性定理により、その集合の中に真偽の決定不能な命題があるはずだ。その命題の真偽はもはや統語論的には決められず、意味論的に、すなわち数学的直観によって判断する以外ない。逆に当の統語論が適切に作られていたかどうかを判断するのに意味論が要るのだ、と。

話が少し難しいので、私が具体例を補足します。まず、我々が高校で習う「三角関数の加法定理」について考えてみましょう。

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$$

これは一体何の性質でしょう？　もし三角関数もその加法定理も人間の勝手な取り決めによる作り物なのなら、それは究極的には人間の性質であるということになります。すると、人間、特にその脳を研究すると三角関数の加法定理が事実であることが分かるし、人間の脳を研究しない限り厳密には三角関数の加法定理を理解したことにはならないということになりそうです。しかし、それはどうも変です。三角関数の加法定理は三角関数の性質であって、それは人間にとっても、他の生き物にとっても成り立つでしょう。例えばトンボの飛び方を研究するのに三角関数の加法定理は要るだろうと思います。トンボがそれを理解しないとしても、活用してはいるはずです。そもそも生き物などいなくても三角関数は存在し、加法定理は成り立つのではないでしょうか。原始の生命の誕生前の地球でもそうだったのではないでしょうか？

もう一つ、もっと簡単な例を挙げましょう。$1+1=2$ ということは、「1」とか「2」とか「+」とか「=」とかいう記号についての規約（約束）だ、と思っている人は大勢います。例えば関連性理論や意味論の専門家である

[7] Chomsky (1995) “Language and Nature” http://www.ucd.ie/artspgs/meaningthree/chomskylangnatobj.pdf （邦訳あり）; Chomsky (2015) *What Kind of Creatures Are We?* Columbia Univ Press. などを参照しています。

西山佑司先生が、東京言語研究所での理論言語学講座の授業中にそうおっしゃっていました。[8]しかし、$1+1$ が 2 に等しいことを人間が勝手に決めたのだとしたら、その決め方が正しかったのかどうか確かめることが問題になります。「他の決め事と矛盾しなければいい」というのが規約主義の立場ですが、それだとどうしてそんな風に恣意的に作った命題が、現実の対象の計算、例えば、お金の計算やリンゴの数の計算に応用できるのかが、分からなくなります。そこを確かめるにはどうしても、1 個の対象を数え：1、もう 1 個の対象を数え：1、それらをまとめ： $1+1$、できたまとまりを構成する対象を改めて数える： 2 ということをやってみた上で、$1+1$ と 2 とを等置しなくてはなりません。これは一種の観察・実験・再観察です。

その「数を観察する」力をゲーデルは「数学的直観」と呼んでいるのです。ゲーデル自身の言葉では、

> 数学的命題は、確かに、関連する構造の物理的性質を表現しはしないが、そうした構造を我々が記述する際の**概念**の性質を表現するのである。[9]

$1+1=2$ が指しているような、数についての事実（＝法則）は、我々がどう思うかに関わらず決まっていると考えられ、また、1 のような概念は我々の認識から独立に存在していると考えられるのです。しかしでは、1 の存在する世界は、どこでしょうか？　ゲーデルはこの点についてはっきりしたことを言っていないようなので、後年の学者たちはなかなかゲーデルの概念実在論に納得せず、ゲーデルのプラトニズムは神秘主義だなどという批判も出たようです。[10]とにかく、普通の意味での自然の世界、例えば 1 個のリンゴが存在する世界とは明らかに異なります。でも 1 が神秘的な存在だとは思えません。そこで私はその世界を、リンゴのような自然の対象の存在する世界を包摂する、次元が 1 つ上の世界という意味で、「2 階の自然」と呼ぶことにしました。なお我々が、数学的対象についての事実を、100%確実に感じ取れるとは言えないように思われます。視覚の対象がその通り実在するかどうかは、そう見えている様子以上に確実性の高い仕方で確認することはできません。触覚や聴覚などを援用して参考にすることはできますが、自分の視覚内容そのものは自分の視覚による以上に正確にはなり得ません。見えている物についての事実は見えている様子とは異なるかもしれませんが、それが実際はどうなのかを確認する手立てはないのです。カントが「物自体は（超越論的だから）不可知だ」と言った[11]のはそういうことだと思います。数学的対象を捉える力にも同じような限界があるはずで、自分で感じ取ったことが事実と等しいということを確証してくれるもっと強力な対象観測手段があるわけではないと思うのです。

> 「典型的な実践的数学者は平日にはプラトニストであり、休日には形式主義者である。」[12]

これは数学の哲学の世界で言われる一種の冗談なのですが、数学に熟達したプロの数学者でも、いざ「数学とは何か」と、自分が毎日していることについて哲学的に内省することになると、途端に意見が曖昧になり、素朴に感じたままを言うならプラトニズム的に考えているような気がするけれども、人前で礼儀正しく言うとなると、形式主義的な言葉遣いしか思いつかないという事情を表しています。私は、これは形式主義が数学の存在性格を

8　2015 年 6 月 12 日金曜日 2 限「発話解釈のメカニズム」において私が取ったノートによります。

9　Gödel (*1953/9-V) in Feferman et al. (eds.) (1995: 360) *Kurt Gödel Collected Works Volume III. Unpublished Essays and Lectures.* Oxford University Press.

10　Chihara, C. S. (1982) “Gödelian Thesis regarding Mathematical Objects: Do They Exit? And Can We Perceive Them?” *Philosophical Review* 91. 黒川英徳訳 (1995: 101) 「数学的対象に関するゲーデルのテーゼ――それは存在するか？　そしてわれわれはそれを知覚することができるか？」飯田隆編 (1995) 『リーディングス　数学の哲学――ゲーデル以後』勁草書房.（原典未参照）。

11　これは『純粋理性批判』のあちこちに出てくる指摘です。正確にどこに出てくるのか示すということは、煩雑になるだけですので省略させていただきます。

12　鈴木俊洋 (2013: 185) 『数学の現象学――数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学』法政大学出版局. この文句は、同書注によると以下から引用されたもの。 Hersh (1979: 11) “Some proposals for reviving the philosophy of mathematics,” in Tymoczko (ed.) (1998) *New Directions in the Philosophy of Mathematics—An Anthology*. Princeton.

正確に表していないことの証左であると考えています。

ゲーデルは（哲学的には）概念の世界について上に引用した以上に深くは議論していないようなのですが、数学の世界では、ある対象を包摂する世界を新たにまとめて対象と見て名をつけ、その性質を研究し定理を見つけて証明するというようなことが繰り返し重ねて行われるのを常としています。例えば、「ベクトル」という名前は、まず「方向を伴う量」につけられ、次にそれがもたらす座標系における変化の「量の組」につけられ、その一組を成す量の数が 2 つや 3 つに留まらないものにもつけられるようになり、さらに、「ベクトル空間の公理を満たす任意の集合の要素」(その中には1階斉次線型微分方程式 $\frac{dy}{dx}+a(x)\,y=0$ の解のようなものも含まれます) にもつけられることになります。従って、「2 階の自然」を超える「3 階の自然」や「4 階の自然」も存在するものと考えられます。[13]

そして、2 階以上の高階の自然の世界には、数学的対象以外に、通常の言葉で表されるようないろいろな概念が存在することが考えられます。そこで私は、ゲーデルのプラトニズムを数学的対象以外の概念的対象を含む包括的な概念世界が高階の自然として人間の認識から独立に実在し、（少なくとも）人間にはそれを感じ取る力が備わっているという考え方を「高階自然主義」と名付け、信じるようになりました。まとめると、次のようになります。

高階自然主義：

a. 存在論的主張：意味・概念は人間の認識から独立に実在する。

b. 認識論的主張：人間には、意味・概念を捉えるための、知覚に類する力が備わっている。

数学的対象と自然言語に見られるカテゴリーとを一緒くたに扱うことには、認知言語学者レイコフの批判から想起される反感を感じられるかもしれません。レイコフは、数学の世界の集合概念とは異なり、自然言語に現れる集合の成員は必要十分条件によってすべてを規定できるものではなく、典型的な成員と周縁的な成員があるという現象があることを指摘し、この現象をプロトタイプ効果と呼びました。しかし私は、むしろ数学のほうにプロトタイプ効果があることを指摘したいと思います。自然言語における記号（語・句・文）も数学の記号も、概念を直示するものであり、コード化するものではないものと思われます。［直示というのは言語学の関連性理論で「意図明示」と訳される ostension という概念に当てた私なりの訳語で、情報の送り手がその情報を受け手に伝えたいという意図を持ち、かつその意図が受け手に対して顕在的になるように意図する伝達の様態のことです。］私見では、直示とは話し手が聞き手に向かって高階自然の風景の一部を漠然と「指差す」ことであり、話し手自身自分が思いついた概念を正確に現実の高階自然世界がある通りに写し取って意識することができているとは限りませんし、聞き手も話し手の意図した 1 つの領域と正確に等しい領域を特定できるとは限りません。従ってそこには「誤差」が生じ、プロトタイプ効果の生じる余地が出てくるのです。数学的な概念名称から例を挙げれば、歴史上、同一平面上の異なる 2 直線の間の「平行」という概念について、プロトタイプ効果が生じたものと私は考えています。当初は「1 つの平面上の直線と同一平面上にあるその直線上にない 1 点を通る直線で、元の直線と交わらないもの（平行線）は 1 本のみ引ける」という公準（この世はそうなっているという仮説）が考えられていたのですが、実際には 2 本以上引けるとしても、1 本も引けない（必ず交わる）としても、他の公理と矛盾しないように考えることができる、平面がそういう構造をしている可能性があり得る、ということが、19 世

[13] 数学的には、Gödel (1931) の中にいくらでも高階の対象が出てきます。集合論のパラドックスの類（たぐい）を解消するためにラッセルが考え出した分岐タイプ理論というのをうまく簡略化した型 (Typ) の理論をゲーデルは用いており、個々の自然数が型 1 に属し、型 1 の物を集めてできる物が型 2 に属する…、という風に続いていきます。私の高階自然主義は、このゲーデルの型の理論の下に型 0 の対象として普通の意味での自然の物を考え、これを 1 階自然と呼ぶことになります（従って数字が 1 つずつずれます）。

ただ、哲学において心と物の区別は一筋縄ではいかない大問題とされていることから考えると、私のいう「1 階の自然」と「2 階以上の自然」との存在性格の異同の問題は、こんなに簡単には解決できず、もっと精密な考究を必要とすることが判明するかもしれません。

紀になって分かったのです。非ユークリッド幾何の発見です。平行線が 1 本だけ引ける場合の平行が、「平行」という言葉のプロトタイプで、そうでない場合の平行が周縁的な事例であると考えることができます。

　ではその「誤差」を引き起こすこともある「知覚に類する力」とは何か、ということが問題になりますが、フッサールの現象学で使われる**「ノエシス」**（ドイツ語で Noesis, あるいは Noese. ギリシア語の *νοέω* （「見きわめる」、「考える」、「意味する」の意の動詞）の変化形 *νόησις* に由来）や、もっと古いカント哲学にも出てくる**「統覚」**(Apperzeption) という言葉がその力に等しいないし近いと考えるのが妥当であるように私には思われます。[14]

　さらに言えば、**「意識」**という、元々は仏教に由来する言葉をこの概念に充てるのもいいかもしれません。4～5 世紀に成立した、大乗仏教の基礎理論である**「唯識」**では、人間の認識能力を八つに分けます。その中に現在我々が考える五感に相当する、眼・耳・鼻・舌・身（視覚・聴覚・嗅覚・味覚・触覚）の 5 つの「識」＝五識と、「意識」という「識」があり、合わせて六識と言います。意識は五識のいずれにも伴うものなので、

眼	耳	鼻	舌	身	意

ではなく、

<table>
<tr><td colspan="5">意</td></tr>
<tr><td>眼</td><td>耳</td><td>鼻</td><td>舌</td><td>身</td></tr>
</table>

という構図になっています。他に末那識（自我意識）、阿頼耶識（潜在意識）というのがあり、合わせて八識になります。唯識は、「西遊記」で有名な三蔵法師玄奘 (602 - 664) が中国に伝えるためにはるばるインドまで行って研究してきた思想で、日本の遣唐使も玄奘に学び、この思想を故国に持ち帰って伝えています。今日でもお坊さんや尼さんになるための課程の必修科目になっていると聞きます。それくらいポピュラーな思想です。[15]この意味での「意識」は、数学的対象のみならず意味・概念一般を感じ取るための高階の認識能力であると考えることができます。現代用語での「意識」は、科学で説明できないある種謎の概念として扱われているように見えますが、この、仏教の用語としての原義に立ち返れば、それ程不思議な能力とは感じられないのではないかと私は思います。ただし唯識は、（よくは勉強していませんが）読んで字の如く「（認）識しかない」という徹底した観念論で、それとは反対の主張になる私の概念実在論で援用するのは、上の六識の構図だけです。

　既存の用語を流用することには今見たようにいろいろややこしい問題がありますので、ここでは、意味・概念を捉えるための知覚に類する力のことを、**「高階知覚」**という新造語で呼ぶことにします。

　なお、高階自然主義によれば、数学は高階の自然科学ということになり、そこでは「証明」というものが普通に思われているほどの特権的な地位を持たないことになります。高階知覚で感じた事柄を、論証を介してもっと鮮明に感じられる事柄に帰着させるのが証明の役割で、証明によって謎のすべてが解決し、高階知覚が全く要らなくなるわけではないのです。物理学で観測が必要なのと同じです。

　また、物理学での仮説の検証には実験が必須ですが、数学でも実験に相当することは必要です。証明というのを、結論が分かった後の事後的な正当化の方法ではなく、結論を探索し認識するための概念の処理法と考えれば、そのことが浮き彫りになります。

---

14 「ノエシス」という語の由来についてはフッサール著渡辺二郎訳 (1984: 391-392) 『イデーン I - II』みすず書房. 訳注第三篇第二章（八〇）によっています（私が古典ギリシア語をちゃんと勉強したわけではありません）。なお、木田他編著 (2014)『縮刷版現象学事典』弘文堂. の「統覚」の項目には、「〈統覚〉は、基本的には〈統握〉と同義である。『論理学研究』II では、しばしば〈統覚〉と〈統握〉は並置され言い換えられている（…）この並置は、Apperzeption が Perzeption との伝統的な対比によって（高次の知覚だという）誤解を生むのを避けるためである（…）。」とありますが、私が問題にしている「知覚に類する力」は「高次の知覚」のほうにこそ等しいように思います。

15 服部正明・上山春平 (1997: 38ff.) 『仏教の思想 4　認識と超越〈唯識〉』角川ソフィア文庫. 及び、柴田隆行・石塚正英 (2013: 10) 監修『哲学・思想翻訳語事典』論創社. などを参照しました。

例えば、背理法（帰謬法）の正体は数学的対象たる命題（＝仮説）について、敢えて反対の想定をしたら何が起きるかを見ようとする実験（矛盾が起きれば実験は成功、矛盾が起きなければ仮説の修正を迫られることになります）であり、また、数学的帰納法の正体は、本質的には、例えば自然数 n についての命題 $P(n)$ の証明であれば、 $P(1), P(2), \cdots$ （初めの数項）が成り立つことを発見した時点で任意の n について $P(n)$ が成り立つ可能性に気付き（＝仮説形成）、それを確かめるために $P(k)$ が成り立つと仮定した場合に $P(k+1)$ が成り立つかどうかを、既知の推論規則の適用によって実験し、結果を観察することで成り立つことが判明し、実験が成功したら、$P(n)$ が成り立つことが確認できたと見なす、仮説演繹法であると言えると私は思います。そういう意味では、私は**「証明」という言葉自体使うのを止めてしまったほうがいいくらいだ**と思っています。

3. プラトニズムに従ったよりエレガントな数学

3.1. 『線型代数入門』の改造方針

多くの数学書が現代数学の一般的な考え方に則った書き方に従って書かれていますが、私はその考え方に哲学的厳密性という観点で少々の問題があると考えています。一言で言えば、実際には存在する数学の認識論という契機が、存在しないかのように扱われ、そのために様々な数学的対象の存在性格に混乱がもたらされているのです。私はそうした書物の代表として斎藤正彦 (1966) 『線型代数入門』（東京大学出版会）に注目し、それを正しい数学観の下に改造し、元の本よりエレガントな、分かりやすい文章にする作業をしてみています。以下本になることを想定して書いたその原稿の改造方針の部分を引用します。

1. 本書の立場では、数学的対象を含む抽象概念は認識から独立な実在であり、数学的判断は、数学的対象の性質を感じ取る際の、知覚に類する力を原動力としていると考える。概念は通常の意味の自然の対象を超える次元にある高階の対象であるが、なおも自然の対象であると考えられるので、これを**高階自然**と呼び、それを感じ取る力は通常の知覚が捉える自然の対象を超える次元にある対象を捉えることからこれを**高階知覚**と呼ぶことにする。これはクルト・ゲーデルの主張した**プラトニズム**あるいは**概念実在論**と呼ばれている考え方を拡張・一般化したもので、**高階自然主義**と呼ぶことにする。

2. 通常、概念の**定義**は、名前にその意味を与える行為であると考えられている。しかし上の考え方からすれば、意味は人間が創造することのできるものではないので、名前にその意味を与えることは不可能である。実際に我々が行っているのは、与えられた概念に新しい名前をつける行為であり、従来の「定義」という語から区別するため、これを**概念命名**と呼び、本書では一貫してこの言い方をすることにする。本書では、概念命名に際し、**なぜその概念に注目し、名前を与えようとするのか**を、できる限り明示する。なお、ある概念の内容の詳細を決めるという意味での「定義する」には「規定する」の語を当てる。

3. 新しく登場する数学的対象について記述する際には、その対象を発見し、それに名前をつける過程として描写する。本書原典など従来型の数学書で行われているような、**定義**あるいは**公理**と呼ばれる書き手が読者に対して定めた恣意的規約によって新しい数学的概念の導入が成し遂げられたかのように見せかける書き方は避ける。

4. **公理**とは、高階知覚のみによって判断した、数学的対象（**高階自然の対象**）についての事実に対する仮説である。「公理」という言葉遣いだけではこうした存在性格の描写が明確には行えないので、本書では**初期仮説**という語を用いる。

5. 未確認の**定理**も仮説である。ある命題を仮説として措定するに当たっては、その命題が正しいだろうと思った理由が必ずある。このことは、本書原典を含む一般の数学書ではあまり考慮されないが、仮説形成は、一般に総合的で内容のある認識過程であり、その成立の過程を明示することは、多くの場合登場する数学的対象の認識のあり方を説明するに当たって重要な契機となる。そこで本書では可能な限り、**仮説形成が進む過程の描写を、仮説の確認の過程の描写以前に行うことにする**。

仮説とは問うに値する命題のことであるから、立てた初期仮説あるいは仮説を描写した文の末尾に疑問符を付すことで仮説であることを表してもよい。

6. 定理が実際に正しいことの確認には、既知の他の定理や公理に帰着していることを確認するという理論内的な手立てがあるが、公理には高階自然の対象を直接**高階知覚による経験**によってできるだけ正確に捉えようとするという、理論外の手立て以上に確実な確認手段がない。

7. **証明**は、題材となっている数学的対象の**内容的性質から独立な論証や計算**によってのみ成立しているかのように考える向きもあるようだが、それは間違いであり、高階知覚で感じ取った事柄が、相対的にもっと鮮明に感じられる事柄に帰着しているのを確認するのが証明の本当の役割である。証明によって謎のすべてが解決し、高階知覚が不要になるわけでは全くない。これは一般の経験科学で法則の候補として立てられた仮説が本当に成り立つかどうかを確かめるのに観測ないし観察が必要なのと同様である。むしろ、仮説形成の過程での観測ないし観察の描写が子細に行われていれば、証明に相当する更なる確認作業が不要になる場合もある。なお、以上のことはゲーデルの第 1 不完全性定理の内容に他ならない。

8. 自然科学での仮説の検証には実験が必須であるが、数学の証明に際しても実験に相当する過程が必要になることがある。仮説は、題材の内容的性質を系統的に観察し、段階的操作を加えた場合にその対象が被るであろう変化を予測して立てるものであるが、実験は、実際にその操作をしてみて得られる結果を観測ないし観察し、仮説との整合性を確かめるという処理に他ならない。

9. 数学における実験の例として、**背理法（帰謬法）**の正体は、成立することが予想される数学的仮説について、敢えて予想と反対に、成立しないという想定をしたら何が起きるかを見ようとする行為である。矛盾が起きれば実験は成功、矛盾が起きなければ仮説の修正を迫られることになる。

10. **数学的帰納法**もその正体は仮説形成と実験の連なりである。例えば自然数 n についての命題 $P(n)$ を発見し、かつ確認しようという場合、まず、$P(1), P(2)$ などが成り立つことを発見した時点で、任意の n について $P(n)$ が成り立つ可能性に気付き、仮説を思いつくことができる。この過程は演繹ではなく、アブダクションと呼ばれることのある総合的で受動的ないし中動的な過程である。

次に、その仮説を確かめる際は、$P(k)$ が成り立つと仮定した場合に $P(k+1)$ が成り立つかどうかを、既知の**推論規則**の適用によって実験し、結果を観察する。それによって $P(k+1)$ が成り立つことが判明したら、実験が成功したと言え、$P(n)$ が成り立つことが確認できたことになる。これは高階自然の対象たる仮説を形成し確かめようとする**仮説演繹法**であると言える。**推論規則**は証明の対象となる仮説より原初的な形で正しいことが判明している、**論理についての仮説**である。最も原初的な状態からどんな推論規則が現実を反映していると考えられるかについては、個人の発達の過程を正確に描写し、後付けていく研究が必要になるものと思われる。これに関連して筆者は、心の背骨仮説という考え方を仮に採用しているが、その詳述はここでは行わない。

11. 証明すなわち命題内容の正当化の手続きには、高階知覚による対象の観測・観察という不確実性を伴う契機が含まれているため、通俗的に思われているほどの決定的な確実性を伴ってはいない。証明の成功は当該命題が事実であると信じられる程度を大きく高めはするが、事実であることを確実に決定するわけではなく、途中の過程での対象の観測・観察に僅かでも間違いがあれば、仮説の信憑性は揺らぐ。

12. 以上のことから、本書では、**証明**という言い方はやめて、**確認**という語を用いることにする。ただし旧来の、「証明終わり」と訳される略語 **Q. E. D.**[16]を、話の句切れ目を明示する記号としてそのまま用いる。公理ならぬ

[16] “Q.E.D.” とは、ラテン語 ” quod erat demonstrandum” の略。「証明されるべきであったところの」の意で、英語に訳すと、” which was to be demonstrated” となる。数学の定理, 問題の証明の終わりに「証明終わり」の意味で添えて使う習慣がある。

初期仮説についても、図などによる確認が可能な場合には、**確認**の語を添える。

13.　以上の議論から分かるように、高階自然主義によれば、**数学は高階の自然科学である。**

14.　専門的数学書では普通に行われる細かい論証や計算の省略が斎藤 (1966) にもあるが、これをそのままにすることは、認識の過程を描写するという本書の目的からすれば、厳密さに瑕疵をもたらすことになるので、その詳細をできる限りすべて埋める。問いや問題には詳解をつける。これは原著や本書を学習目的で繙く読者の便を図ることにもなるものと信ずる。

3.2.　具体例――行列式概念の発見過程の描写の仕方

プラトニズムに基づくよりエレガントな数学の書き方の具体例として、行列式概念の発見過程の描写の仕方をご紹介しようと思います。以下は私が 2010 年度に東京言語研究所の言語哲学の授業のレポートとして提出した文章を再構成したものになります。ほぼそのままを『改造線型代数入門』の一部として組み込む予定です。

3.2.1.　導入

線形代数で行列式の概念を導入するとき、一般的な教科書では、置換や互換の概念の定義とそれらが満たす定理の紹介の後、n次の行列式は、いきなり次のように「定義」されます。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\ \sigma\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

この式の右辺の抽象性は、普通の人の感覚で直ちに意味が分かる限度を越えています。一般的な教科書では、この定義から行列式の多重線形性や交代性を定理として導き出して能事畢れりとしてしまいます。そうした文章の書き方に慣れてしまった数学者にはそれで何の問題もないように思えるのでしょうが、落ち着いて考えてみれば、そのような順序で行列式の概念と性質についての最初の思考が進んだはずがないのは明らかです。

ここでは、行列式の概念を発見していく過程を描写するという態度で議論を進めます。予め議論の骨子をまとめておくと次のようになります。

(i)　2元連立1次方程式の研究から、2次行列式なるものの存在に注目することの必要性を示し、それの特徴づけとして、2重線形性、交代性、単位行列の行列式が1に等しいことの3つが必要十分であることを確認する。

(ii)　n 個の n 次のベクトルのスカラー関数で、n 重線形性、交代性、単位行列に対応する値が 1 に等しいものの一般形を求め、それが「n 次の行列式」と呼ぶべきものだという仮説を立てる。

(iii)　(ii)で求めた「n 次の行列式」に対し n 元連立 1 次方程式が、2 次行列式に 2 元連立 1 次方程式が関わったのと同様な仕方で関わることを確認する。

(iv)　「n 次の行列式」から予想される「2 次の行列式」が、(i)で発見した 2 次の行列式と一致することを確認する。

これら以前にベクトルや行列とその積の概念についても導入を図ります。

3.2.2.　2 次の行列式

2 元連立 1 次方程式、

(1)　$$\begin{cases} ax + by = p \cdots ① \\ cx + dy = q \cdots ② \end{cases}$$

を解くとき、我々は普段どうしているか、自分のする計算をよく観察しながら考えてみましょう。

まず、xを求めるためにはyの項を消去せねばなりません。そのために、

①× d　$adx + bdy = dp$ の両辺から

②× b　$bcx + bdy = bq$ の両辺を引き、

$$(ad-bc)x=dp-bq$$

$$x=\frac{dp-bq}{ad-bc}$$

を得ます。

同様に、yを求めるためには、xの項を消去するために

①× c　　$acx+bcy=cp$　の両辺から

②× a　　$acx+ady=aq$　の両辺を引き、

$$(bc-ad)y=cp-aq$$

$$y=\frac{cp-aq}{bc-ad}=\frac{aq-cp}{ad-bc}$$

を得ます。

得られた解

(2)

$$(x,y)=\left(\frac{dp-bq}{ad-bc},\frac{aq-cp}{ad-bc}\right)$$

を見ると、x,yいずれの結果においても分母に

$$ad-bc$$

が現れているのが分かります。これは初めに掲げた連立方程式の左辺の未知数x,yについていた係数のみで定まる値です（この値が 0 である場合に方程式の解がどうなるかという問題は、ここでは論じません)。

以上を考え直してみると、連立方程式(1)は、x,yについての 1 次式を 2 つ並べたものという見方の他に、未知数の組x,yに既知数の組a,b,c,dを然るべき配置で作用させると数の組p,qが得られた、という見方も可能であることが分かります。それを素直に表現すると

(3)　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

と書くのがよいように思われます。

(3)を数学における正式な式の書き方として採用するとなると、注目して名前を付けなくてはならない概念が 2 つあります。

〈概念命名〉

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

のように、数が 1 列に並んだ組をベクトルと呼ぶ。特に、縦 1 列に並んだ組を列ベクトル、横 1 列に並んだ組を行ベクトルと呼ぶ。

そして、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように、数が四角形上に並んでできた組を行列と呼ぶ。

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は列ベクトル$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$とから成っていると見ることもできるし、行ベクトル$(a\ \ b)$と$(c\ \ d)$から成っていると見ることもできます。

(1)と(3)が同じことを意味しているということは、(3)の左辺が(1)の①、②の左辺を並べたもの（列ベクトル）と等しいようになっているはずです。即ち、(3)の左辺は次のような意味を持っていることが分かります。これは一般には行列とベクトルの積と呼ばれているものの一例です。

(4)　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

ここで一言差し挟んでおきたいのですが、今私は自分のほしいままに「ベクトル」、「行列」、「行列とベクトルの積」という概念を作りだしたのではありません。あくまで対象にもともと備わっていた意味の側面のうち、今の議論上気になるものに注目し、(慣用に従いつつ) 名を付けたまでです。当たり前のことを冗長に書いたようですが、発明ではなく発見の過程を描写するという方針を貫いたにすぎません。

さて $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ に更に別の行列 $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が左から作用したとした場合どうなるかを調べてみます。

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(ax+by)+f(cx+dy) \\ g(ax+by)+h(cx+dy) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (ea+fc)x+(eb+fd)y \\ (ga+hc)x+(gb+hd)y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すると最初の式と関係(4)と最後の式とから、

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が得られるので、行列同士の積は、

(5) $$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

という関係になっていることが分かります。このままでは、関係式がやや見えづらいので、(4)を分析して

(4’) $$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax+by$$

が成り立っていることを考えて(5)を次のように見直しておきます。

(5’) $$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

これで行列の積の意味がよく分かりました。なお、2 列の行ベクトルは、1 行 2 列の行列と見なすことができることにも留意すべきです。

なお、列ベクトルが左、行ベクトルが右の場合のベクトル同士の行列としての積については、

(6) $$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zx & zy \\ wx & wy \end{pmatrix}$$

となることは、これまでの考察の延長線上に見出されることです。

なお、単一の数をベクトルや行列から区別するときは、これをスカラーと呼びます。

さて、先に見た連立方程式(3)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

の解

(7)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dp-bq}{ad-bc} \\ \dfrac{aq-cp}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

は、見たところ複雑であり、書き方に更なる工夫をすることで新たな見方が開けるように期待されます。

x, yの値の分母にある $ad-bc$ は、a, b, c, d ともとの方程式(3)におけるそれらの配置にのみ基づく値ですから、行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の関数であると言えます。そこで、
〈概念命名〉

(8) $ad - bc = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

と書くことに何らかの意味があることが予期されます。これは一般には行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式と呼ばれています。

行列式にはどのような性質があるでしょうか。
〈実験と観察〉

行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の 1 列目をα倍すると（αは任意のスカラー）、

(9) $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad - bc) = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

行列式全体がα倍となることが分かります。[17]
2 列目をβ倍すると（βも任意のスカラー）、

(10) $\begin{vmatrix} a & \beta b \\ c & \beta d \end{vmatrix} = \beta ad - \beta bc = \beta(ad - bc) = \beta\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

行列式全体がβ倍となります。
〈実験と観察〉
また、行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の 1 列目に任意の列ベクトル $\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}$ を加えると、

(11) $\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = (a + a')d - b(c + c') = (ad - bc) + (a'd - bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

となり、2 列目に任意の列ベクトル $\begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix}$ を加えた場合は、

(12) $\begin{vmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{vmatrix} = a(d + d') - (b + b')c = (ad - bc) + (ad' - b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$

となる。
(9)、(10)、(11)、(12)の結果を総合的に表現すると次のようになります。即ち、行列式の 2 つの列のうち任意の一方（ここでは代表して 1 列目）に、定数スカラーk_1, k_2 定列ベクトル $\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}$ を次のように作用させると、

(13) $\begin{vmatrix} k_1 a + k_2 a' & b \\ k_1 c + k_2 c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 a & b \\ k_1 c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_2 a' & b \\ k_2 c' & d \end{vmatrix} = k_1\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k_2\begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

となります。
即ち、列の定数倍の和の行列式は、行列式の定数倍の和に等しいという結果が得られます。これは行列式の重要な特徴の一つであり、一般には、行列式の列についての線形性と呼ばれます。〈概念命名〉
同じことがもう一方の列についても成り立つことから、行列式は列について 2 重線形性を持つと言われます。
なお、(9) - (13)の実験を行ベクトルに対して行なっても同様の結果が得られるので [18]、行列式は行ベクトルに

---

[17] 今していることは、「行列式」というまだ正体のよく分かっていないものに対する実験に他ならないということに留意されたく存じます。
[18] $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ という事実によると言ってもよいでしょう。

ついても 2 重線形性を持つと言えます。
〈実験と観察〉
今度は行列式の 2 つの列の順序を入れ換えてみましょう。

(14) $$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

行列式の符号が変わりました。もう一度列を入れ換えればもとに戻ります。この性質も行列式の重要な性質であり、一般には交代性と呼ばれます。〈概念命名〉

交代性から次のことが直ちに分かります。
〈実験と観察〉
ある行列式の 2 つの列が相等しいベクトルから成るとすると、その行列式の列を入れ換えても中身の行列は変わりませんが、交代性により符号は変わりますから、

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}$$

移項して、

$$2\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$$

よって、

(15) $$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$$

即ち、2 つの列が相等しいとき、行列式の値は 0 となります。行についても交代性が成り立つことは明らかなので、2 つの行が相等しいときも行列式の値は 0 となります。

行列式の性質は 2 重線形性と交代性の 2 つだけなのでしょうか。換言すれば、2 重線形性と交代性だけで行列式は特徴づけられるのでしょうか。最初の連立方程式(1)は、未知数とそのスカラー倍の和のみからなっており、それを解く過程でも、式に対する加算減算やスカラー倍、順序の交換しか用いませんでした。そして結果である(2)（あるいは(7)）は、次のように行列式だけを用いて表せます。
(16)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

この観察からすると、他に行列式に特徴的な性質はない公算が高いように思われますが、確かめるために実験を行なってみましょう。
〈実験と観察〉

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のスカラー値関数で、行、列ベクトルに関する 2 重線形性と交代性とを備えた任意のものを

$$Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$Q\begin{pmatrix} a & b+a \\ c & d+c \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \quad (\because Q\text{の列についての線形性})$$

$$= Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\because Q\text{の列についての交代性})$$

従って、任意の定数スカラーk_1, k_2 につき、

$$Q\begin{pmatrix} a & k_1 b + k_2 a \\ c & k_1 d + k_2 c \end{pmatrix} = k_1 Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

特に、ここで$k_1 = a,\ k_2 = -b$ として左右の辺を逆に書くと、

$$aQ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & ad - bc \end{pmatrix}$$

$ad - bc \neq 0$ の場合は、

$$\text{前式} = (ad - bc)Q\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = (ad - bc)Q\begin{pmatrix} a - 0 \cdot c & 0 \\ c - 1 \cdot c & 1 \end{pmatrix}$$

($\because$ 線形性を利用し、2 列目の列ベクトルのc倍を 1 列目の列ベクトルから引きました。)

従って、

$$aQ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc)Q\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$なら

$$aQ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a(ad - bc)Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc)Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これにより、$a \neq 0$ のときは$Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の値を 1 とすると、関数Q は行列式に一致することになります。$a = 0$の場合も、

$$0 = -bcQ\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

となり、やはり関数Qは行列式に一致します。

なお、上の計算では、$ad - bc \neq 0$ の場合を考えましたが、$ad - bc = 0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

を満たすスカラー$l \neq 0$ が存在し、

(18) $Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} lb & b \\ ld & d \end{pmatrix} = lQ\begin{pmatrix} b & b \\ d & d \end{pmatrix} = 0 = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

故に、$ad - bc = 0$ のときも関数Q と行列式とは一致することが分かりました。

以上の観察と実験により、行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の、2 重線形性と交代性を備えかつ入力$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては 1 を出力するスカラー値関数は、行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ に限られること、換言すれば、行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の本質的な特徴は、2 重線形性、交代性、$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ の 3 つで尽きることが分かりました。

3.2.3. 「n次の行列式」はどうなるか

前節で扱った行列式は、2 行 2 列の行列に対する関数であり、2 次の行列式と呼ばれます。しかしもっと大き

な行列式の存在を思い描くこともできます。〈外挿 (extrapolation) による仮説形成〉例えばn元連立 1 次方程式

(19) $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=p_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=p_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=p_n \end{cases}$$

を解くことを考えたとき、これを

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

と書き表せば[19]、「n次の行列式」とでも呼ぶべき存在、即ち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とでも書くべき数学的対象が存在し、連立方程式の解が(16)と類比的に

(20)

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots p_1\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots p_2\cdots a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\cdots p_n\cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

（ただし、 $j=1,2,\cdots n$; 分子で$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ のある列はj 列目。）

で与えられるようになっているのではないかということ〈仮説〉が想像できます。

この仮説を確かめるために、まず 2 次の行列式を特徴づけていた条件を確認します。それは、行及び列についての 2 重線形性、交代性、そして $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$ というものでした。

この 3 つをn次の場合に自然に拡張するとどのようなものが作れるでしょうか。

まず、行列Uとその列ベクトル$\boldsymbol{u}_j$を次のように表記します。

$$U=\begin{pmatrix} u_{11}\,u_{12}\cdots u_{1n} \\ u_{21}\,u_{22}\cdots u_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ u_{n1}\,u_{n2}\cdots u_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_j=\begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}$$

(ただし、 $j=1,2,\cdots n$)

このUの関数 $Q(U)=Q(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ で、n重線形性と交代性を備えたものを作り出し、

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots 0 \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots \\ 0 & 0\cdots 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

（ただし、$\boldsymbol{e}_i$とは、i番目の数のみが 1 で後は 0 ばかりから成る列ベクトル。$i=1,2,\cdots n$）

に対しては

[19] これでn 次正方行列とn 個の数から成るベクトルの積についての説明は済んだことにさせていただきます。

(21) $Q(E)=Q(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1$

とします。

まず、n重線形性から、$Q(U)$の一般形について次のような解明ができます。

$$Q(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=Q\left(\begin{pmatrix}u_{11}\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\u_{21}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\u_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_n\right)$$

$$=Q\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i1}\boldsymbol{e}_i\,,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_n\right)$$

$$=Q\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i1}\boldsymbol{e}_i\,,\sum_{i=1}^{n}u_{i2}\,\boldsymbol{e}_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}u_{in}\boldsymbol{e}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}u_{i1}\,Q\left(\boldsymbol{e}_i,\sum_{i=1}^{n}u_{i2}\,\boldsymbol{e}_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}u_{in}\boldsymbol{e}_i\right)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}u_{i_11}\sum_{i_2=1}^{n}u_{i_22}\,Q\left(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\sum_{i_3=1}^{n}u_{i_33}\,\boldsymbol{e}_{i_3},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}u_{i_nn}\boldsymbol{e}_{i_n}\right)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}u_{i_11}\sum_{i_2=1}^{n}u_{i_22}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}u_{i_nn}\,Q\left(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}\right)$$

よって、

(22)

$$Q(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}u_{i_11}\,u_{i_22}\cdots u_{i_nn}Q\left(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}\right)$$

n重線形性で分かるのはここまでですが、ここで更に交代性をも考慮します。2 次行列式において交代性とは、2 つの列ベクトルを入れ換えると、行列式の符号が変わるということでした。その必然的帰結として、2 つの列ベクトルが等しい行列式は 0 に等しいということがありました（(15)）。

今Qに対して同様に考えると、総和記号によって足し合わされているn^n個の項の基部にある$Q\left(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}\right)$のうち、$\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n}$の中の少なくとも 2 つが一致するものは 0 になると考えてよいので、(22)の総和は、簡略化することができます。$i_1,i_2,\cdots,i_n$（どれも 1 からnまでの数）という数の組のうち、同じ数字を重ねて使わないものは、数$1,2,\cdots,n$からなる順列であり、それは$n!$個あります。

$n!$個の順列すべてから成る集合をS_nと書くことにします。まず、(21)により

$$Q(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1$$

です。そして、順列$i_1,i_2,\cdots,i_n$がS_nの中の各元をわたる様子は、それらのn個の数のうち 2 つを取り換えることの繰り返しにより表されます。1 回取り換えれば符号が代わり、もう 1 回取り換えればもとに戻ります。従って奇数回取り換えれば符号は反対になり、偶数回取り換えればもとと同じになります。[20]

以上のことを考慮して(22)を書き換え、$Q(U)$のより簡略な一般式を得るため、記号に工夫をします。n個の数字$1,2,\cdots,n$からなる順列を、写像を用いて表すことを考えます。順列$1,2,\cdots,n$を並べかえて左からj番目の数がi_j

[20] 通常は「任意の置換は何個かの互換の積として表わされる。そのときのその互換の個数が偶数であるか、奇数であるかは、はじめに与えられた置換によって決まり、互換の積として表わす表わしかたにはよらない」（斎藤 (1966: 76)）ということを定理として証明しますが、その内容は仰々しく書かなくても捉えることができるものです。

になった場合、もともとjがあった所にi_jが来て取って代わったので、写像の記号としてσを用いて、

$$\sigma(j) = i_j$$

と書けます。これは、jが 1 からnまで変わる間ずっと成り立つ式です。つまり、写像σは、順列 1 つにつき 1 つの結果が定まる写像で、写し残りも写し重なりもない全単射であり、順列から順列への写像と捉えることもできます。例えば、順列$1,2,\cdots,j,\cdots,n$から別の順列$i_1,i_2,\cdots,i_j,\cdots,i_n$ができたということを、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_j & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と表すことも可能です。このような、順列を作る写像を置換と呼びます。〈概念命名〉

n個の数字に対する置換の数は、順列の数に等しく$n!$個です。n個の数字に対する置換のありうるものすべてを集めた集合は順列の集合S_nと同一視することができます。

$Q(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n})$の絶対値は必ず 1 であり、その符号は、中の列ベクトルの作る順列が、$Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$から始めて 2 つの列ベクトルの取り換え（互換と言います。〈概念命名〉）を奇数回行なって得られるならマイナス、偶数回ならプラスとなるのでした。この符号は従って置換σが 1 つ定まれば定まります。つまり、置換σに対してそれに符号を与える写像 sgn が存在し、

$$sgn\,\sigma = \begin{cases} +1(\sigma\text{が偶数回の互換からなる場合}) \\ -1(\sigma\text{が奇数回の互換からなる場合}) \end{cases}$$

となっています。

これだけ記号法を準備すると、求めようとしていた(22)の一般式の簡略化が次のように得られます。

(23)

$$Q(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\,\sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2} \cdots u_{\sigma(n)n}\, Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\,\sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2} \cdots u_{\sigma(n)n} \quad (\because (21))$$

3.2.4　仮説の確認その１　得られた式と連立方程式の関係

上述のように得られた $Q(U)$ が、我々が存在を予期していた「n次の行列式」なのかどうかは、それが連立方程式 (19) に対して解 (20) を与える際に使われる行列の関数と一致することを見れば確かめられます。即ち、次のような実験がうまくいけばよいのです。

n元連立 1 次方程式(19)を行列表示します。

(24)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

略記して、

$$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

あるいは更に略記して、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

とします。このとき、(20) を参照すれば、

$$x_j = \frac{Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n)}{Q(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}$$

（ただし、$1 \leq j \leq n$）

が成り立つのなら、$Q(U)$ は予想していたn次の行列式であるといって（ほぼ）間違いありません。〈仮説〉

然るに、$\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x}$なのですから、

$$Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n) = Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n) = Q\left(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n) \quad (\because Qの線形性)$$

この右辺の総和記号の中のn個の項のうち$k \neq j$となるものについては、その基部のQが、交代性により 0 になりますから、$k = j$の項だけが残り、

$$Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n) = x_j Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n)$$
$$= x_j Q(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$
$$\therefore x_j = \frac{Q(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n)}{Q(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}$$

実験成功ですが、仮説の完璧な確認のためにはもう 1 つ確認事項があります。

3.2.5　仮説の確認その２　見つかったn次の行列式と最初に見つけた２次の行列式

上の議論によると、n次の$Q(U)$の一般形は

(25)（=(23)）

$$Q(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\, \sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2} \cdots u_{\sigma(n)n}$$

となるわけですが、〈仮説〉この式でnを 2 とおいて得られる式は、3.2.2 節で検討した 2 次の行列式と一致するでしょうか？　〈実験〉実際に(25)において$n = 2$としてみると、

$$Q\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} sgn\, \sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2}$$

S_2に含まれる置換は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の 2 つのみで、前者の符号はプラス、後者はマイナスですから、

$$\sum_{\sigma \in S_2} sgn\, \sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2} = u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12}$$

つまり結局、

$$Q\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

となり、$Q(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$と、3.2.2 節で見た 2 次の行列式は、一致します。

以上により、仮説が全く正しかったこと、即ち、n次の行列式というものは実在し、その一般形は、

$$\begin{vmatrix} u_{11}\, u_{12} \cdots u_{1n} \\ u_{21}\, u_{22} \cdots u_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ u_{n1}\, u_{n2} \cdots u_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\, \sigma\, u_{\sigma(1)1} u_{\sigma(2)2} \cdots u_{\sigma(n)n}$$

であるということが、判明しました。

Q.E.D.

3.2.2 節からここまでのすべての議論が、対象の意味を考えることによってのみなされており、意味抜きの形式的統語論などというものには全く出る幕がなかったことに留意されたく存じます。

3.3.　今後の課題

プラトニズムが正しいだろうという話をしてきましたが、それをちゃんと言うためには、対抗する考え方である直観主義を排する必要があります。それは、私は今の所よく勉強していません。今後の課題となります。日本語で読める概説的文献がないようなので、これは難しい課題です。

線型代数や解析についてもまだ隅々まで勉強し尽してはおらず、これから学ばなくてはならないことがあります。その後微分方程式、集合と位相、代数学、微分幾何学など数学科の学生なら必ず学ぶようなことはできればすべて体得したいと思っていますが、今の所できる見通しは立っていません。放送大学の授業だけではそこまではいけないと思いますので、皆様にその道案内をお願いできれば幸いです。

なお、現在放送大学では、「入門線型代数」、「入門微分積分」「初歩からの物理」「初歩からの化学」を受講しています。今後物理や化学、さらには情報科学などの基礎理論もできる限り身につけていきたいと思っています。言語学や哲学にも興味があります。要するに、かつて東京大学の学生としてやりたくてできなかったことをやり直したいのです。