

CONTENTS

1. 開講の辞	4	1
2. 前回の訂正と補充		2
3. 古典的な完全数の数表		2
4. フェルマーとオイラーの結果; $(P = 2)$ の場合		3
5. フェルマーとオイラーの結果; $(P = 3)$ の場合		6
5.1. $P = 5$		11
5.2. 末尾の数		12
5.3. $P = 7$		14
5.4. 末尾の数		15
6. 一般の弱完全数		18
7. フェルマとオイラーの結果 (一般の場合):完成版		19
7.1. $P = 5$ の場合		26
7.2. $P = 5$ のときの弱完全数の数表		27
7.3. $P = 5, Q = 2p + 1$ も素数の数表		29
7.4. $P = 7$		32
8. $P = 7; p$: Sophie Germain 素数		33
8.1. $P = 11$		41
8.2. 末尾の数		43
8.3. $P = 13$		44
8.4. 末尾の数		45
8.5. $P = 17$ の弱完全数		46
8.6. 末尾の数		46
8.7. $P = 31$ の弱完全数		47
8.8. $P = 47$ の弱完全数		48
8.9. $P = 19$ の弱完全数		49
8.10. 末尾の数		49
8.11. $P = 23$ の弱完全数		50
8.12. 末尾の数		50
9. 条件を弱める		51
9.1. 周期性の証明		56
9.2. $P = 2$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化		59
10. P を底とする弱弱完全数		60
10.1. $P = 3$; 弱弱完全数の表		62

13. 微弱完全数	86
14. 弱弱完全数の因数分解	86
14.1. $P = 2, p = 3$ の例	87
14.2. 証明	88
14.3. $P = 3, p = 5$ の例	89
14.4. $P = 5$ の例	90
14.5. $P = 5, p = 3$	90
14.6. $P = 7, p = 3$	91
14.7. $P = 2, p = 3, 5$	92

書泉グランデでの講義 第3期 資料1
高校生も十分わかる新しい数論研究, 2015年6月26日

飯高 茂

1. 開講の辞 4

担当者から,受講希望者が7名という報告があった. 小学生は積極的なのだが大人の参加が厳しくなった. しかし,これは連絡ミスで,第三期の案内を数学セミナ6月号(販売は5月中旬)に載せ損なったことが一因であることがわかった. 数学セミナ7月号には掲載されたが第三期の開催当日と重なった. 12名の正式の参加者があり,そのほかの傍聴者を加えて15名なので何とか書店に対して面目がたってほっとした.

2015年6月26日

2. 前回の訂正と補充

3. 古典的な完全数の数表

TABLE 1. $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$, $e + 1$:素数

$2^e = a$	$\sigma(a)$	$N_p =$ 素因数分解
$2 = 2$	3	[3]
$2^2 = 4$	7	[7]
$2^4 = 16$	31	[31]
$2^6 = 64$	127	[127]
$2^{10} = 1024$	2047	[23, 89]
$2^{12} = 4096$	8191	[8191]
$2^{16} = 65536$	131071	[131071]
$2^{18} = 262144$	524287	[524287]
$2^{22} = 4194304$	8388607	[47, 178481]
$2^{30} = 1073741824$	2147483647	[2147483647]

4. フェルマーとオイラーの結果; ($P = 2$) の場合

補題 1. p が素数のとき $2^p - 1$ の素因数 Q については $Q - 1 = 2Lp$ と書ける.

さらに $Q \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

次の表は $M_p 2^p - 1$ の各素因数 Q について $Q - 1$ を素因数分解したものである. $[2, p, \dots]$ の形になっていることを味わうべきである.

24 ?- all_factor_qq(2,3=<30) .

p=3 [2,3]

N_p=[7]

6=[2,3]

p=5 [2,5]

N_p=[31]

30=[2,3,5]

p=7 [2,7]

N_p=[127]

126=[2,3²,7]

p=11 [2,11]

N_p=[23,89]

22=[2,11]

88=[2³,11]

$$p=13 \quad [2, 13]$$

$$N_p = [8191]$$

$$8190 = [2, 3^2, 5, 7, 13]$$

$$p=17 \quad [2, 17]$$

$$N_p = [131071]$$

$$131070 = [2, 3, 5, 17, 257]$$

$$p=19 \quad [2, 19]$$

$$N_p = [524287]$$

$$524286 = [2, 3^3, 7, 19, 73]$$

$$p=23 \quad [2, 23]$$

$$N_p = [47, 178481]$$

$$46 = [2, 23] \quad 178480 = [2^4, 5, 23, 97]$$

$$p=29 \quad [2, 29]$$

$$N_p = [233, 1103, 2089]$$

$$232 = [2^3, 29] \quad 1102 = [2, 19, 29] \quad 2088 = [2^3, 3^2, 29]$$

5. フェルマーとオイラーの結果; $(P = 3)$ の場合

3を底としたメルセンヌ素数についてもフェルマーとオイラーの結果は成立する.

補題 2. p が素数のとき $\frac{3^p-1}{2}$ の奇数素因数 Q については $Q-1 = 2Lp$ と書ける.

さらに $Q \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

Proof.

条件より,

$$3^p \equiv 1 \pmod{Q}.$$

p は素数なので 3 の \pmod{p} での位数は p .

フェルマーの小定理によると $3^{Q-1} \equiv 1 \pmod{Q}$. よって, $Q-1 = kp$ と書ける. $Q-1$ は偶数なので k も偶数. よって $k = 2L$ と表せることによって $Q-1 = 2Lp$ と書ける.

$$3^{\frac{Q-1}{2}} \equiv 3^{Lp} \equiv 1 \pmod{Q}.$$

ルジャンドルの記号を用いるとオイラーの基準によって

$$3^{\frac{Q-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{Q}\right)$$

$3^{\frac{Q-1}{2}} \equiv 1$ なので $\left(\frac{3}{Q}\right) = 1$. 平方剰余の補充法則から $Q \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

次の表は $3^{\frac{Q-1}{2}}$ の各素因数 Q について $Q-1$ を素因数分解したものである。 $[2, p, \dots]$ の形になっていることを味わうべきである。

$$p=3 \quad [3, 3]$$

$$N_p = [13]$$

$$12 = [2^2, 3]$$

$$p=5 \quad [3, 5]$$

$$N_p = [11, 11]$$

$$10 = [2, 5] \quad 10 = [2, 5]$$

$$p=7 \quad [3, 7]$$

$$N_p = [1093]$$

$$1092 = [2^2, 3, 7, 13]$$

$$p=11 \quad [3, 11]$$

$$N_p = [23, 3851]$$

$$22 = [2, 11] \quad 3850 = [2, 5^2, 7, 11]$$

$$p=13 \quad [3, 13]$$

$$p=17 \quad [3, 17]$$

$$N_p = [1871, 34511]$$

$$1870 = [2, 5, 11, 17]$$

$$34510 = [2, 5, 7, 17, 29]$$

$$p=19 \quad [3, 19]$$

$$N_p = [1597, 363889]$$

$$1596 = [2^2, 3, 7, 19]$$

$$363888 = [2^4, 3^2, 7, 19^2]$$

$$p=23 \quad [3, 23]$$

$$N_p = [47, 1001523179]$$

$$46 = [2, 23]$$

$$1001523178 = [2, 23, 29, 37, 103, 197]$$

$$p=29 \quad [3, 29]$$

$$N_p = [59, 28537, 20381027]$$

$$58 = [2, 29]$$

$$28536 = [2^3, 3, 29, 41]$$

$$20381026 = [2, 29, 35139]$$

TABLE 2. $P = 5$:弱完全数

p	$(2p + 1)$	$Q = N_p =$ 素因数分解	a :弱完全数
2	$(5)=5$	$(6)=2*3$	30
3	$(7)=7$	$(31)=31$	775
5	$(11)=11$	$(781)=11*71$	488125
7	$(15)=3*5$	$(19531)=19531$	305171875
11	$(23)=23$	$(12207031)=12207031$	119209287109375
13	$(27) = 3^3$	$(305175781)=305175781$	7450580590820312
17	$(35)=5*7$	$(190734863281)=409*466344409$	2910383045669555664
19	$(39)=3*13$	$(4768371582031)=191*6271*3981071$	181898940354576110839

5.1. $P = 5$.

5.2. 末尾の数. $p > 2$ のとき $p = e + 1$ は奇数なので $e \equiv 0, 2 \pmod{4}$. そこで $a \equiv 25, 75 \pmod{100}$ は成り立つ.

より詳しく,

- $e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $Q \equiv 31, a \equiv 75 \pmod{100}$.
- $e \equiv 0 \pmod{4}$ なら $Q \equiv 81, a \equiv 25 \pmod{100}$.

が成り立つ事を高嶋耕司さんが詳しく証明した.

多分, 弱完全数でも証明は通用する.

$$p=3 \quad [5, 3]$$

$$N_p = [31]$$

$$30 = [2, 3, 5]$$

$$p=5 \quad [5, 5]$$

$$N_p = [11, 71]$$

$$10 = [2, 5] \quad 70 = [2, 5, 7]$$

$$p=7 \quad [5, 7]$$

$$N_p = [19531]$$

$$19530 = [2, 3^2, 5, 7, 31]$$

$$p=11 \quad [5, 11]$$

$$N_p = [12207031]$$

$$12207030 = [2, 3, 5, 11, 71, 521]$$

$$p=13 \quad [5, 13]$$

$$N_p = [305175781]$$

$$305175780 = [2^2, 3^2, 5, 7, 13, 31, 601]$$

$$p=17 \quad [5, 17]$$

$$N_p = [409, 466344409]$$

$$408 = [2^3, 3, 17] \quad 466344408 = [2^3, 3, 17, 31, 36871]$$

$$p=19 \quad [5, 19]$$

$$N_p = [191, 6271, 3981071]$$

$$190 = [2, 5, 19] \quad 6270 = [2, 3, 5, 11, 19] \quad 3981070 = [2, 5, 19, 23, 9781]$$

$$p=23 \quad [5, 23]$$

$$N_p = [8971, 332207361361]$$

$$8970 = [2, 3, 5, 13, 23] \quad 332207361360 = [2^4, 3^2, 5, 7, 23, 293, 9781]$$

$$p=29 \quad [5, 29]$$

$$N_p = [59, 35671, 22125996444329]$$

$$58 = [2, 29] \quad 35670 = [2, 3, 5, 29, 41] \quad 22125996444328 = [2^3, 3, 7, 29, 139, 179, 199, 239, 279, 319, 359, 399, 439, 479, 519, 559, 599, 639, 679, 719, 759, 799, 839, 879, 919, 959, 999]$$

5.3. $P = 7$. 予稿にはミスプリントが多かったので訂正版をここに載せる.

TABLE 3. $P = 7$:弱完全数

p	$(2p + 1)$	$Q = N_p =$ 素因数分解	a :弱完全数
2	(5)=5	(8) = 2^3	56
3	(7)=7	(57)= $3 \cdot 19$	2793
5	(11)=11	(2801)=2801	6725201
7	(15)= $3 \cdot 5$	(137257)= $29 \cdot 4733$	16148148793
11	(23)=23	(329554457)= $1123 \cdot 29345$	93090977300134793
13	(27) = 3^3	(16148168401)=16148168401	223511436608353935601
17	(35)= $5 \cdot 7$	(38771752331201)= $14009 \cdot 2767631689$	1288498953284568548534420801
19	(39)= $3 \cdot 13$	(1899815864228857)= $419 \cdot 4534166740403$	3093685986836262112339927626793

5.4. 末尾の数. $p = e + 1$ は素数を仮定しているので, $e \equiv 0, 2 \pmod{4}$ の場合のみおきる.

- $e \equiv 0 \pmod{4}$ なら $Q \equiv 01, a \equiv 01 \pmod{100}$.
- $e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $Q \equiv 57, a \equiv 93 \pmod{100}$.

$$p=3 \quad [7, 3]$$

$$N_p = [3, 19]$$

$$2 = [2] \quad 18 = [2, 3^2]$$

$$p=5 \quad [7, 5]$$

$$N_p = [2801]$$

$$2800 = [2^4, 5^2, 7]$$

$$p=7 \quad [7, 7]$$

$$N_p = [29, 4733]$$

$$28 = [2^2, 7] \quad 4732 = [2^2, 7, 13^2]$$

$$p=11 \quad [7, 11]$$

$$N_p = [1123, 293459]$$

$$1122 = [2, 3, 11, 17] \quad 293458 = [2, 11, 13339]$$

$$p=13 \quad [7, 13]$$

$$N_p = [16148168401]$$

$$16148168400 = [2^4, 3, 5^2, 7, 13, 19, 43, 181]$$

$$p=17 \quad [7, 17]$$

$N_p = [47, 3083, 31479823396757]$

$46 = [2, 23]$

$3082 = [2, 23, 67]$

$31479823396756 = [2^2, 7^2, 23, 191]$

6. 一般の弱完全数

$e + 1$ が素数 p になるとき, $Q = \frac{P^{e+1}-1}{P}$ と ($N_p = \frac{P^{e+1}-1}{P}$ も使われる) おき,

$a = P^e Q$ を (P を底とする) 弱い完全数, または弱完全数 (weak perfect number with respect to P) という.

総称して一般の弱完全数とも言う.

7. フェルマとオイラーの結果(一般の場合):完成版

(ここからが本体部分になる.)

フェルマとオイラーの結果は $P = 2$ で成り立つのだが一般化された究極の完全数でも成立するという著しい結果を紹介する.

1) $P - 1 \not\equiv 0 \pmod{Q}$ のときと

2) $P - 1 \equiv 0 \pmod{Q}$ のときで区別する必要がある

ことにだんだんと気づいたが定理として明確に述べてはいなかった.それが反省点である.

奇素数 P を底とするとき $N_p = \frac{P^p - 1}{P - 1}$ の素数因子 (奇数) Q について

$$P^p \equiv 1 \pmod{Q}$$

になる.

1) $P - 1 \not\equiv 0 \pmod{Q}$ ならば \pmod{Q} で P の位数は素数 p である. $P \neq Q$ により, フェルマの小定理によれば $P^{Q-1} \equiv 1 \pmod{Q}$ なので $Q - 1$ は位数 p で割れる.

よって $Q - 1 = kp$ と書ける.

1-a) $p > 2$ を仮定する. Q, p はともに奇数なので k は偶数. したがって, $Q = 1 + 2k'p$ と書ける. オイラーの基準によって

$$P^{\frac{Q-1}{2}} = \left(\frac{P}{Q} \right)$$

$$P^{\frac{Q-1}{2}} = P^{pk'} \equiv 1 \pmod{Q}. \text{ ゆえに}$$

$$\left(\frac{P}{Q} \right) = 1.$$

逆に $Q = 2p + 1$ が素数 (p : Sophie Germain 素数) とする.
さらに $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を仮定すると, $P \equiv n^2 \pmod{Q}$ を満たす n
がある.

$$P^p = P^{\frac{Q-1}{2}} \equiv n^{Q-1} \equiv 1 \pmod{Q}$$

これより, 素因子 Q は $P^p - 1$ の素因子になる.

$P - 1 \not\equiv 0 \pmod{Q}$ なので Q は $N_p = \frac{P^p - 1}{P - 1}$ の素因子.

1-b) $p = 2$ のときは, $Q - 1 = 2k$. $p = 2$ なので $N_2 = P + 1$ となりこの素因数分解から奇数素因子 Q を求める.

2) $P \equiv 1 \pmod{Q}$ ならば次の場合が起こる.

$P^j \equiv 1 \pmod{Q}$ によって

$$N_p = 1 + P + \dots + P^{p-1} \equiv p \pmod{Q}.$$

Q は N_p の素因子なので $N_p \equiv 0 \pmod{Q}$. ゆえに $p \equiv 0 \pmod{Q}$. p, Q は素数なので $p = Q$.

$P \equiv 1 \pmod{Q}$ によれば $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{1}{Q}\right) = 1$.

したがって次の結果が証明できた.

定理 1. 奇素数 P が底のとき $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素因子 (奇数) Q について $P-1 \not\equiv 0 \pmod{Q}$ ならば,

(1) N_p の素因子 (奇数) Q について $Q-1 = kp$ と書ける.
 $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1.$

(2) 一般に $2p+1$ が素数 Q のとき $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を仮定すると,
 Q は N_p の素数因子.

$P \equiv 1 \pmod{Q}$ ならば, $p = Q.$

次は Lagrange の結果の一般化.

定理 2. p を素数とし, $N_p = \frac{P^p - 1}{P - 1}$ とおく. $Q = 2p + 1$ は N_p の因子とする.

このとき $Q = 2p + 1$ も素数.

Proof.

$Q = 2p + 1$ は素数でないとする. その最小の素因子をとり Q_0 とする. $2p + 1 \geq N_0^2$ を満たす. Q_0 も N_p の素因子なので $Q_0 \neq P$.

$$P^p = \bar{P}N_p + 1 \equiv 1 \pmod{Q_0}.$$

p は素数なので Q_0 を法とした P の位数である. フェルマの小定理を用いて

$$P^{Q_0-1} \equiv 1 \pmod{Q_0}.$$

ゆえに, $Q_0 - 1$ は p の倍数. とくに $Q_0 - 1 > p$ になり

$$2p + 1 \geq Q_0^2 > p^2 + 2p + 1 > 2(p + 1) + 1$$

7.1. $P = 5$ の場合. フェルマとオイラーの結果(一般の場合)を $P = 5$ で使うと

$P - 1 = 4 = 2^2$ なので $p = Q = 2, N_2 = P + 1 = 5 + 1 = 2 * 3$.
 $Q = 3, p = 2$.

定理 3. (1) $N_p = \frac{5^p - 1}{4}$ の素因子(奇数) Q について $\left(\frac{5}{Q}\right) = 1$.

(2) 素数 Q は $2p + 1$ と書けるとき $\left(\frac{5}{Q}\right) = 1$ を仮定すると,
 Q は N_p の素数因子.

$\left(\frac{5}{Q}\right) = 1$ の条件は 平方剰余の相互法則から容易にもとまり $Q \equiv \pm 1 \pmod{5}$ がその条件になる.

$Q \equiv 1 \pmod{5}$ のとき $Q = 2p + 1$ と素数でかけるとすると
 $2p + 1 = 1 + 5L$. これより $2p = 5L$. $p = 5, L = 2, Q = 11$. したがって, $(5^5 - 1)/4 = 11 * 71$.

7.2. $P = 5$ のときの弱完全数の数表. $N_p = \frac{P^p - 1}{P} = \frac{5^p - 1}{4}$

TABLE 4. $P = 5$

p	$(2p + 1)$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	(6)=2*3	30
3	(7)=7	(31)=31	775
5	(11)=11	(781)=11*71	488125
7	(15)=3*5	(19531)=19531	305171875
11	(23)=23	(12207031)=12207031	119209287109375
13	(27)=3 ³	(305175781)=305175781	74505805908203125
17	(35)=5*7	(190734863281)=409*466344409	29103830456695556640625
19	(39)=3*13	(4768371582031)=191*6271*3981071	<i>A</i>
23	(47)=47	<i>B</i>	<i>C</i>
29	(59)=59	<i>D</i>	<i>E</i>
31	(63)=3 ² * 7	<i>F</i>	<i>G</i>
37	(75)=3 * 5 ²	<i>H</i>	<i>I</i>
41	(83)=83	<i>J</i>	<i>K</i>
43	(87)=3*29	<i>L</i>	<i>M</i>
47	(95)=5*19	<i>N</i>	<i>O</i>

$$A = 18189894035457611083984375$$

$$B = (2980232238769531) = 8971 * 332207361361$$

$$C = 7105427357601001262664794921875$$

$$D = (46566128730773925781) = 59 * 35671 * 22125996444329$$

$$E = 1734723475976807094402611255645751953125$$

$$F = (1164153218269348144531) = 1861 * 625552508473588471$$

$$G = 1084202172485504434007219970226287841796875$$

$$H = (18189894035458564758300781) = 149 * 13971969971 * 8737481256739$$

$$I = 264697796016968855958850777824409306049346923828125$$

$$J = (11368683772161602973937988281) = 2238236249 * 5079304643216687969$$

$$K = 103397576569128459358926086506471619941294193267822265625$$

$$L = (284217094304040074348449707031) = 1644512641 * 172827552198815888791$$

$$M = 64623485355705287099328804067909004515968263149261474609375$$

$$N = (177635683940025046467781066894531)$$

$$= 177635683940025046467781066894531$$

$$O = 25243548967072377773175314089049123822405817918479442596435546875$$

TABLE 5. $P = 5, Q = 2p + 1$ も素数

p	$Q = 2p + 1$	$(N_p) = \text{素因数分解}$
2	5	$(6) = 2 * 3$
5	11	$(781) = 11 * 71$
23	47	$(2980232238769531) = 8971 * 332207361361$
29	59	A
41	83	B
53	107	C
83	167	$D = E$
89	179	$F = G$
113	227	$H = I$
131	263	$J = K$

7.3. $P = 5, Q = 2p + 1$ も素数の数表.

$$A = (46566128730773925781) = 59 * 35671 * 22125996444329$$

$$B = (11368683772161602973937988281) = 2238236249 * 5079304643216687969$$

$$C = (2775557561562891351059079170227050781) = 960555749 * 17154094481 * 27145365052629449$$

$$D = (2584939414228211483973152162718633917393162846565246582031)$$

$$E = 20515111 * 1431185706701868962383741 * 88040095945103834627376781$$

$$F = (40389678347315804437080502542478654959268169477581977844238281)$$

$$G = 179 * 9807089 * 14597959 * 834019001 * 8157179360521 * 231669654363683130095909$$

$$H = (2407412430484044816319972428231159148172627060269235244049923494458198547363281)$$

$$I = 2939 * 6329 * 129499 * 308491 * 304247586761 * 2084303944451$$

$$- * 620216264269531 * 8237123176890810696379$$

$$J = 918354961579912115600575419704879435795832466228193$$

—

$$3761787122705300134839490056037902832031)$$

$$K = 2621 * 23928199 * 34720241 * 16815642611861 * -$$

$$250805666433416532678429525124977090318975999001796354124089$$

$Q \equiv 1 \pmod{5}$ のとき $Q = 2p + 1$ と素数でかけるときは $2p + 1 = 1 + 5L$. これより $2p = 5L$. $p = 5, L = 2, Q = 11$. したがって, $(5^5 - 1)/4 = 11 * 71$.

$Q \equiv -1 \pmod{5}$ のとき $Q = 9 + 10L$ と書ける.

$Q \equiv -1 \pmod{5}$ のとき $Q = 19, 29, 59, 79, 89, 109, 139, 149, 179, 199, 229, 239, 269 \dots$ のうちから $Q = 59, Q = 179$ の 2 例ができたことがわかる.

7.4. $P = 7$. 奇素数 $P = 7$ が底のとき,

定理 4. 奇素数 $p \neq 7$ について

- (1) $N_p = \frac{7^p - 1}{6}$ の素因子 (奇数) Q について $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$.
- (2) 素数 Q は $2p + 1$ と書けるとき $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ を仮定すると,
 Q は N_p の素数因子.

$P - 1 = 6 = 2 * 3$. したがって $Q = 3 = p$ となり $\frac{7^3 - 1}{6} = 3 * 19$ を満たす.

$p = 2$ のとき $P + 1 = 8 = 2^3$.

8. $P = 7$; p : SOPHIE GERMAIN 素数

1) 最初にすること: 2, 7 と異なる素数 Q について $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ を解く.

相互法則により

$$\left(\frac{7}{Q}\right) \left(\frac{Q}{7}\right) = (-1)^{\frac{Q-1}{2} * 3} = (-1)^{\frac{Q-1}{2}}.$$

$Q \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $(-1)^{\frac{Q-1}{2}} = 1$. この場合,

$$\left(\frac{7}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{7}\right)$$

$\left(\frac{Q}{7}\right)$ の計算は簡単にできる.

$2^2 = 4, 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$ により $Q \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ なら
 $\left(\frac{Q}{7}\right) = 1$.

$Q \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ なら $\left(\frac{Q}{7}\right) = -1$.

組み合わせると $Q \equiv 1 \pmod{4}$ かつ $Q \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ なら
 $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$

これをもとに計算する. $Q = 1 + 4k$ を用いて方程式 $Q = 1 + 4k \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ を書き直す.

$Q = 1 + 4k \equiv 1 \pmod{7}$ から $k \equiv 0 \pmod{7}$. ゆえに $k = 7L$ と書けるから $Q = 1 + 4k = 1 + 28L$. $Q \equiv 1 \pmod{28}$.

$1 + 4k \equiv 2 \pmod{7}$ から $4k \equiv 1 \equiv 8 \pmod{7}$. $k \equiv 2 \pmod{7}$
ゆえに $k = 2 + 7L$ と書けるから $Q = 1 + 4k = 9 + 28L$.
 $Q \equiv 9 \pmod{28}$.

$1 + 4k \equiv 4 \pmod{7}$ から $4k \equiv 3 \equiv 3 + 21 = 24 \pmod{7}$.
 $k \equiv 6 \pmod{7}$

ゆえに $k = 6 + 7L$ と書けるから $Q = 1 + 4k = 1 + 24 + 28L = 25 + 28L$. $Q \equiv -3 \pmod{28}$.

次に $Q \equiv 3 \pmod{4}$ かつ $Q \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ なら $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ の方の計算.

$Q = 3 + 4k$ を用いて方程式 $Q = 3 + 4k \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ を書き直す.

$Q = 3 + 4k \equiv 3 \pmod{7}$ から $k \equiv 0 \pmod{7}$. ゆえに $k = 7L$ と書けるから $Q = 3 + 4k = 3 + 28L$. よって, $Q \equiv 3 \pmod{28}$.

$Q = 3 + 4k \equiv 5 \pmod{7}$ から $4k \equiv 2 \equiv 2 + 14 = 16 \pmod{7}$. $k \equiv 4 \pmod{7}$. ゆえに $k = 4 + 7L$ と書けるから $Q = 3 + 4k = 3 + 4(4 + 7L) = 19 + 28L$. $Q \equiv -9 \pmod{28}$.

$Q = 3 + 4k \equiv 6 \pmod{7}$ から $4k \equiv 3 \equiv 3 + 21 = 24 \pmod{7}$. $k \equiv 6 \pmod{7}$. ゆえに $k = 6 + 7L$ と書けるから $Q = 3 + 4k = 3 + 4(6 + 7L) = 27 + 28L$. $Q \equiv -1 \pmod{28}$.

以上により, $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ のとき
 $Q = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \pmod{28}$.

2) $Q = 2p + 1$ を仮定するとき, $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ の場合に限って p を求める.

$2p + 1 = \pm 1 + 28k$ と書けるとき $p = (\pm 1 - 1)/2 + 14k$ により $(\pm 1 - 1)/2$ は奇数. $\pm 1 = -1$ なので $p = -1 + 14k$. 例は $p = 13, 13 + 28 = 41,$

$Q = 2p + 1 = \pm 3 + 28k$ と書けるので $p = (\pm 3 - 1)/2 + 14k$ により $(\pm 3 - 1)/2$ は奇数. $\pm 3 = 3$ なので $p = 1 + 14k$. 例は $p = 29, 43,$

$Q = 2p + 1 = \pm 9 + 28k$ と書けるので $p = (\pm 9 - 1)/2 + 14k$ により $(\pm 9 - 1)/2$ は奇数. $\pm 9 = -9$ なので $p = -5 + 14k \equiv 9 \pmod{14}$. 例は $p = 23, 37, 79$

$P - 1 = 6 = 2 * 3$ により $p = Q = 3$.

$p = 2, P + 1 = 8 (8) = 2^3$

$p, Q = 2p + 1$ も素数のときの数表.

TABLE 6. $P = 7, Q = 2p + 1$ も素数

p	$Q = 2p + 1$	(N_p) =素因数分解
2	5	$(8)=2^3$
3	7	$(57)=3*19$
11	23	$(329554457)=1123*293459$
23	47	$(4561457890013486057)=47*3083*31479823396757$
29	59	$(536650959302196621139601)=59*127540261*71316922984999$
41	83	A
53	107	$B = C$
83	167	$D = E$

$$A = (7427940054393865983365007662428001) = 83*20515909*4362139336229068656094783$$

$$B = (102812251604677061048459359469231621132196401)$$

$$C = 8269 * 319591 * 8904276017035188056372051839841219$$

$$D = (2317320324970087447233098679232119852283366872016190787490668645944057)$$

$$E = 167*66733*76066181*7685542369*62911130477521*303567967057423*18624275418445601$$

$Q = 2p+1$ が N_p の最小素因子となるのは $Q = 47, 59, 83, 167$.
対応して $p = 23, 29, p = 83 = 13 + 5 * 14, 167 = 13 + 11 * 14$.

8.1. $P = 11$. $p = 2, P + 1 = 12 = 2^2 * 3$

$P = 11, P - 1 = 10 = 2 * 5$. $Q = p = 5$ がある.

このとき $N_5 = \frac{5^5 - 1}{4} = (16105) = 5 * 3221$.

$$N_p = \frac{P^p - 1}{P} = \frac{11^p - 1}{10}.$$

TABLE 7. $P = 11$

e	p	$(2p + 1)$	$(N_p) =$ 分解	a
1	2	(5)=5	(12)= $2^2 * 3$	132
2	3	(7)=7	(133)= $7 * 19$	16093
4	5	(11)=11	(16105)= $5 * 3221$	235793305
6	7	(15)= $3 * 5$	(1948717)= $43 * 45319$	3452271037237
10	11	(23)=23	(28531167061)= $15797 * 1806113$	740024994423222267661
12	13	(27)= 3^3	(3452271214393)= $1093 * 3158528101$	10834705943388058361345353
16	17	(35)= $5 * 7$	(50544702849929377)= 50544702849929377	A0
18	19	(39)= $3 * 13$	(6115909044841454629)= 6115909044841454629	A
22	23	(47)=47	B	C
28	29	(59)=59	D	E
30	31	(63)= $3^2 * 7$	F	G
36	37	(75)= $3 * 5^2$	H	I
40	41	(83)=83	J	K
42	43	(87)= $3 * 29$	L	M

$$A_0 = 2322515441988780809505203793273697$$

$$A = 34003948586157739898684696499226975549$$

$$B = (89543024325523737224653) = 829 * 28878847 * 3740221981231$$

$$C = 7289048368510305214290278538501245253967902613$$

$$D = (158630929717149157441443670489) = 523 * 303309617049998388989376043$$

$$E = 22876156239024650606645326473334848325625895160495412605609$$

$$F = (19194342495775048050414684129181) = 50159 * 2428541 * 157571957584602258799$$

$$G = 334929803495559909531894224896304907162715367932636041603766981$$

$$H = (34003948586157739899240688230576198697) = 2591 * 36855109 * 136151713 * 2615418118891695851$$

$$I = 1051153199500053598403188407217590190704579879232264635077522314892256470617$$

$$J = (497851811249935469864782916383866125124241)$$

$$= 83 * 1231 * 27061 * 509221 * 14092193 * 29866451 * 840139875599$$

$$K = 225324023604401248793730853803334956796672939988861482205529251845184623522089398641$$

$$L = (60240069161242191853638732882447801140033173)$$

$$= 1416258521793067 * 42534656091583268045915654719$$

$$M = 3298969029592038683589013430534627102460089171541311810885973997778797699690196049501133$$

$$N = (881974852589746930929124688131918256491225687357)$$

$$= 2069 * 22666879066355177 * 18806327041824690595747113889$$

$$O = 7071633096370052987228539828633738974356170631456409943$$

$$- - 18500556468267327181081133208187483831077$$

8.2. 末尾の数. 表を観察してもきれいな結果が見えてこない.

$$e \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき } q \equiv 1, 3, 5, 7, 9 \pmod{10}$$

$$e \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき } q \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{10}$$

$P = 11$ がこれほど期待を裏切る素数とは思わなかった. しかしこのように末尾の数の1,2桁の数の性質は10進展開で得られた性質なので, 皮相的な結果にすぎない, ということもできる.

この困難さは弱弱完全数によって解決される. これはささやかな結果ではあるが, まったく予想外の良い結果なのである.

[研究課題] $2, 11$ と異なる素数 Q について $\left(\frac{11}{Q}\right) = 1$ を解く.

8.3. $P = 13$. $P - 1 = 12 = 3 * 2^2$, $Q = p = 3$.

$$P + 1 = 14 = 2 * 7$$

$$N_p = \frac{P^p - 1}{P}$$

TABLE 8. $P = 13$

p	$(2p + 1)$	$(N_p) = \text{分解}$	a
2	(5)=5	(14)=2*7	182
3	(7)=7	(183)=3*61	30927
5	(11)=11	(30941)=30941	883705901
7	(15)=3*5	(5229043)=5229043	25239591813787
11	(23)=23	(149346699503)=23*419*859*18041	20588710756109377851047
13	(27)=3 ³	(25239592216021)=53*264031*1803647	588034167905566113995468101
17	(35)=5*7	(720867993281778161)=103*443*15798461357509	A
19	(39)=3*13	(121826690864620509223)=12865927*9468940004449	B

$$A = 479677535758244089774221240729252401$$

$$B = 13700070098791209449615908553795581328767$$

8.4. 末尾の数. 表を観察すると,

• $e \equiv 0 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$.

• $e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $q \equiv 3, q \equiv 7 \pmod{10}$.

$13^4 \equiv 1 \pmod{10}$. この性質を使って証明できるだろう.

TABLE 9. $P = 17$

p	$(2p + 1)$	$(N_p) = \text{分解}$	a
2	(5)=5	(18)= $2 * 3^2$	306
3	(7)=7	(307)=307	88723
5	(11)=11	(88741)=88741	7411737061
7	(15)= $3*5$	(25646167)=25646167	619036125548023
11	(23)=23	(2141993519227)=2141993519227	4318245869562919805432923

8.5. $P = 17$ の弱完全数.

8.6. 末尾の数.

- $p \equiv 1 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$.
- $e \equiv 3 \pmod{4}$ なら $q \equiv 7, a \equiv 3 \pmod{10}$.

8.7. $P = 31$ の弱完全数. $P - 1$ が 2 個以上の奇数素因子を含む場合を計算した.

TABLE 10. $P = 31$

p	(N_p)	分解
3	(993)	$3 \cdot 331$
5	(954305)	$5 \cdot 11 \cdot 17351$
7	(917087137)	917087137
11	(846949229880161)	$23 \cdot 397 \cdot 617 \cdot 150332843$
13	(813918209914834753)	$42407 \cdot 2426789 \cdot 7908811$
17	(751670559138758105956097)	751670559138758105956097
19	(722355407332346539823809249)	$571 \cdot 14251 \cdot 88770666332610762169$
23	(667110388134976008804624141476513)	$1509997 \cdot 61562537 \cdot 7176374761323733117$

$P - 1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ なので $Q = 3, 5$ に注目.

$p = 3$ での素因数分解 $3 \cdot 331$ で $Q = 3$.

$p = 5$ での素因数分解 $5 \cdot 11 \cdot 17351$ で $Q = 5$.

TABLE 11. $P = 47$

p	(N_p)	分解
3	(1893)	$3*631$
5	(3500201)	3500201
7	(6471871693)	$7*5839*158341$
11	(22126041415981493)	$6038099*3664405207$
13	(40911050578149780601)	40911050578149780601
17	(139866740627629048068560801)	$647*56770350869*3807926835707$
19	(258613603420486109878768921093)	$229*2699*4219*46399*2137444528747943$

8.8. $P = 47$ の弱完全数. $P - 1 = 46 = 2 * 3 * 7$ なので $Q = 3, 7$ に注目.

$p = 3$ での素因数分解 $3 * 631$ で $Q = 3$.

$p = 7$ での素因数分解 $7 * 5839 * 158341$ で $Q = 7$.

8.9. $P = 19$ の弱完全数.

8.10. 末尾の数.

- $p \equiv 1 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$.
- $e \equiv 3 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$.

8.11. $P = 23$ の弱完全数.

8.12. 末尾の数.

- $p \equiv 1 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$.
- $e \equiv 3 \pmod{4}$ なら $q \equiv 3, a \equiv 7 \pmod{10}$.

9. 条件を弱める

弱完全数の条件をさらに弱めて, $e+1$ を奇数 $2\varepsilon-1$ ($e+1 = 2$ はあえて付加する) だけにしてみよう.

意外にも次からわかるように 末尾 1 桁が 6 または 8 という性質はやはり成立している.

$e+1$ を奇数と仮定している場合, 弱々しいが完全な数, (弱々完全数; ww-perfect number) と呼んでみたい.

TABLE 12. $P = 2$

$2\varepsilon - 1$	$Q = 2^{2\varepsilon-1} - 1$	素因数分解	a : 弱弱完全数
2	3	3	6
3	7	7	28
5	31	31	496
7	127	127	8128
9	511	$7*73$	130816
11	2047	$23*89$	2096128
13	8191	8191	33550336
15	32767	$7*31*151$	536854528
17	131071	131071	8589869056
19	524287	524287	137438691328
21	2097151	$7^2 * 127 * 337$	2199022206976
23	8388607	$47*178481$	35184367894528
25	33554431	$31*601*1801$	562949936644096
27	134217727	$7*73*262657$	9007199187632128
29	536870911	$233*1103*2089$	144115187807420416
31	2147483647	2147483647	2305843008139952128
33	8589934591	$7*23*89*599479$	36893488143124135936
35	34359738367	$31*71*127*122921$	590295810341525782528
37	137438953471	$223*616318177$	9444732965670570950656
39	549755813887	$7*79*8191*121369$	151115727451553768931328

弱弱完全数 a の末尾の数は $6, 8, 6, 8, \dots$ が正確に繰り返され、 $Q = 2^{2\varepsilon-1} - 1$ の末尾の数は 最初を飛ばすと $7, 1, 7, 1, \dots$ となり正確に繰り返されている。

そこで欲を出して $Q = 2^{2\varepsilon-1} - 1$ と弱弱完全数 a の下 2 桁 の数を並べてみた。

TABLE 13. $P = 2$

$2\varepsilon - 1$	$Q = 2^{2\varepsilon-1} - 1$	素因数分解	Q の下 2 桁	a	a の下 2 桁
3	7	7	7	28	28
5	31	31	31	496	96
7	127	127	27	8128	28
9	511	7*73	11	130816	16
11	2047	23*89	47	2096128	28
13	8191	8191	91	33550336	36
15	32767	7*31*151	67	536854528	28
17	131071	131071	71	8589869056	56
19	524287	524287	87	137438691328	28
21	2097151	$7^2 * 127 * 337$	51	2199022206976	76
23	8388607	47*178481	7	35184367894528	28

Q の下 2 桁 の数は 7,31,27,11,47,67,71,87,37,7;(周期は 10)
 a の下 2 桁 の数は 28,96,28,16,28,36,28,56,28,76,28;(周期は 10); 28 が 1 つおきに出る.28 は第 2 の完全数.

完全数の下2桁の数を研究した結果はあるようだ.

弱弱完全数については, 下2桁の数の変化の推移が具体的に
見えてきた.

指数部分が奇数で等差数列になったその結果, 下2桁の数が
周期10で正しく変化することが分かった.

弱完全数,あるいは真正完全数では,素数条件がつくため周
期性の性質が虫食い状態になり変化の状況が見えづらくなっ
ている.

9.1. 周期性の証明. 以下ではこの周期性の結果を証明する.

$Q = 2^{2^\varepsilon - 1} - 1$ となる Q を $Q_{2^\varepsilon - 1}$ と書き, 弱弱完全数 $a = 2^{2^\varepsilon - 2} Q_{2^\varepsilon - 1}$ を $a_{2^\varepsilon - 1}$ と書くことにする.

$Q_3 = 2^3 - 1 = 7, Q_{23} = 2^{23} - 1$ なので $Q_{23} - Q_3 = 2^{23} - 2^3 = 2^3(2^{20} - 1)$. この数が 100 の倍数であることを確認しよう.

$2^{10} = 1024 \equiv 24 \pmod{100}$ を利用すると $2^{20} \equiv 24^2 = 576 \equiv 76$ により $2^{20} - 1 \equiv 75$.

4 倍すると

$$4(2^{20} - 1) \equiv 300 \equiv 0 \pmod{100}$$

$$Q_{23} - Q_3 = 2^3(2^{20} - 1) \equiv 0 \pmod{100}$$

$20+3 = 23$ を一般にして $20m+3$ を考えると $Q_{20m+3} - Q_3 \equiv 0$. $L = \varepsilon - 1$ とおき 2^{2L} を掛けると

$$Q_{20m+3+2L} - Q_{3+2L} \equiv 0 \pmod{100}.$$

$L = 1, 2, 3, 4, \dots$ に応じて $Q_{3+2L} = Q_5 = 2^5 - 1 = 31$, $Q_7 = 2^7 - 1 = 32 \times 4 - 1 \equiv 287$ と計算した結果, Q_{3+2L} はそれぞれ

27, 11, 47, 91, 67, 71, 87, 51, 7, 31, 27, \dots

これから 周期が10 もわかった.

$\xi = 20m + 3 + 2L$ とおくとき $a_\xi = 2^{\xi-1}Q_\xi$ が成り立つ.

$$Q_\xi - Q_{3+2L} \equiv 2^{\xi-1} - 2^{2+2L} = (2^{20m} - 1) * 2^{2L+2} \equiv 0 \pmod{100}$$

に注意して

$$\begin{aligned} a_\xi - a_{3+2L} &= 2^{\xi-1}Q_\xi - 2^{2+2L}Q_{3+2L} \\ &\equiv 2^{\xi-1}Q_\xi - (Q_{3+2L}) + 2^{\xi-1} - (2^{2+2L})Q_{3+2L} \\ &\equiv 0 \pmod{100}. \end{aligned}$$

TABLE 14. $P = 2$; 下2桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = 2^p - 1$	$a = 2^{p-1}Q$
3	7	28
5	31	96
7	27	28
9	11	16
11	47	28
13	91	36
15	67	28
17	71	56
19	87	28
21	51	76
23	7	28
25	31	96

9.2. $P = 2$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化. 周期は $(21 - 1)/2 = 10$.

これより完全数の下2桁は, 28, 96, 16, 36, 56, 76 のどれかになる.

10. P を底とする弱弱完全数

一般に P を奇素数とし, $p = e+1$ が奇数のとき, $Q_p = \frac{P^p-1}{P}$ に関して $a_p = P^e Q_p$ を P を底とする弱弱完全数 (ww-perfect number) という.

$Q_p = \frac{P^p-1}{P}$ を変形する

$$\begin{aligned}\overline{P}Q_{p+2} &= P^2 P^p - 1 \\ &= P^2(\overline{P}Q_p + 1) - 1 \\ &= P^2\overline{P}Q_p + P^2 - 1.\end{aligned}$$

これより

$$Q_{p+2} = P^2 Q_p + P + 1.$$

これより

$$a_{p+2} = P^4 a_p + P(P^2 - 1)Q_p + P(P + 1).$$

数列 (p : 奇数のみ) $\{Q_p\}, \{a_p\}$ は連立漸化式で定まるがこれを 10, 100, 1000 を法としてエクセルで計算すると容易にそれぞれの下 1 桁, 2 桁, 3 桁が求められる.

TABLE 15. $P = 3$;

$2\varepsilon - 1$	$(3^{2\varepsilon-1} - 1)/2 =$ 素因数分解	a : 弱弱完全数
3	(13)=13	117
5	(121) = 11^2	9801
7	(1093)=1093	796797
9	(9841)= $13 \cdot 757$	64566801
11	(88573)= $23 \cdot 3851$	5230147077
13	(797161)=79716	423644039001
15	(7174453)= $11^2 \cdot 13 \cdot 4561$	34315186290957
17	(64570081)= $1871 \cdot 34511$	2779530261754401
19	(581130733)= $1597 \cdot 363889$	225141952751788437
21	(5230176601)= $13 \cdot 1093 \cdot 368089$	18236498186842001001
23	(47071589413)= $47 \cdot 1001523179$	1477156353259726319517
25	A	B
27	C	D
29	E	F
31	G	H
33	I	J
35	K	L
37	M	N
39	O	P

10.1. $P = 3$; 弱弱完全数の表.

$A = (423644304721) = 11^2 * 8951 * 391151$
 $B = 119649664615167550026801$
 $C = (3812798742493) = 13 * 109 * 433 * 757 * 8209$
 $D = 9691622833838739015484197$
 $E = (34315188682441) = 59 * 28537 * 20381027$
 $F = 785021449541029367424039801$
 $G = 308836698141973 = 683 * 102673 * 4404047$
 $H = 63586737412824202325875602477$
 $I = 2779530283277761 = 13 * 23 * 3851 * 2413941289$
 $J = 5150525730438767800476679208001$
 $K = 25015772549499853 = 11^2 * 71 * 1093 * 2664097031$
 $L = 417192584165540258547337814514357$
 $M = 225141952945498681 = 13097927 * 17189128703$
 $N = 33792599317408761542712904163659401$
 $O = 2026277576509488133 = 13^2 * 313 * 6553 * 7333 * 797161$
 $P = 2737200544710109690363152107948379837$

弱弱完全数の Q 下2桁 と a 下2桁 を書き出した.

TABLE 16. $P = 3$

$2\varepsilon - 1$	$Q = (3^{2\varepsilon-1} - 1)/2$	Q の素因数分解	a : 弱弱完全数	Q 下2桁	a 下2桁
3	13	13	117	13	17
5	121	11^2	9801	21	1
7	1093	1093	796797	93	97
9	9841	$13*757$	64566801	41	1
11	88573	$23*3851$	5230147077	73	77
13	797161	79716	423644039001	61	1
15	7174453	$11^2 * 13 * 4561$	34315186290957	53	57
17	64570081	$1871*34511$	A	81	1
19	581130733	$1597*363889$	B	33	37
21	5230176601	$13*1093*368089$	C	1	1
23	47071589413	$47*1001523179$	D	13	17
25	423644304721	$11^2 * 8951 * 391151$	E	21	1
27	3812798742493	$13*109*433*757*8209$	F	93	97
29	34315188682441	$59*28537*20381027$	G	41	1

$$A = 2779530261754401$$

$$B = 225141952751788437$$

$$C = 18236498186842001001$$

$$D = 1477156353259726319517$$

$$E = 119649664615167550026801$$

$$F = 9691622833838739015484197$$

$$G = 785021449541029367424039801$$

11. $P = 3$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化

TABLE 17. $P = 3$; 下 2 桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	13	17
5	21	1
7	93	97
9	41	1
11	73	77
13	61	1
15	53	57
17	81	1
19	33	37
21	1	1
23*	13	17
25	21	1

周期は $(21 - 1)/2 = 10$.

$3^5 = 243, 43^4 = 3418801$ より

$$3^5 \equiv 43 \pmod{200}, 43^4 - 1 \equiv 0 \pmod{200}.$$

よって $3^{20} - 1 \equiv 0 \pmod{200}$.

TABLE 18. $P = 5$; 下2桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
5	81	25
7	31	75
9	81	25

11.1. $P = 5$ の弱弱完全数の p, Q, a 変化. 周期は 2

TABLE 19. $P = 7$

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	57	93
5	1	1
7	57	93

11.2. $P = 7$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化.

TABLE 20. $P = 11$; 下 2 桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	33	93
5	5	5
7	17	37
9	69	89
11	61	61
13	93	53
15	65	65
17	77	97
19	29	49
21	21	21
23	53	13
25	25	25
27	37	57
29	89	9

11.3. $P = 11$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化. 周期は $(53-3)/2 = 25$

TABLE 21. $P = 11$; 下 2 桁; 続き

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
31	81	81
33	13	73
35	85	85
37	97	17
39	49	69
41	41	41
43	73	33
45	45	45
47	57	77
49	9	29
51	1	1
53 *	33	93
55	5	5

$$A = 11^{10} = 25937424601,$$

$$B = 4601^5 = 2061869461571623001.$$

これより

$$11^{50} - 1 \equiv 0 \pmod{1000}.$$

$$\frac{11^{50} - 1}{10} \equiv 0 \pmod{100}.$$

TABLE 22. $P = 11$

$2e + 1$	$(11^{2e+1} - 1)/10$	分解	a
3	133	$7 \cdot 19$	16093
5	16105	$5 \cdot 3221$	235793305
7	1948717	$43 \cdot 45319$	3452271037237
9	235794769	$7 \cdot 19 \cdot 1772893$	U
11	28531167061	$15797 \cdot 1806113$	V
13	3452271214393	$1093 \cdot 3158528101$	W
15	417724816941565	$5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 3221 \cdot 195019441$	X
17	50544702849929377	50544702849929377	Y
19	6115909044841454629	6115909044841454629	Z
21	740024994425816010121	A	B
23	89543024325523737224653	C	D
25	10834705943388372204183025	E	F
27	1310999419149993036706146037	G	H

$$D = 7289048368510305214290278538501245253967902613$$

$$E = 5^2 * 3001 * 3221 * 24151 * 1856458657451$$

$$F = 106718957163359378642424086278988841454677198699025$$

$$G = 7 * 19 * 1772893 * 5559917315850179173$$

$$H = 1562472251828744662703731061512487473010580175674018157$$

TABLE 23. $P = 13$; 下2桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	83	27
5	41	1
7	43	87
9	81	1
11	3	47
13	21	1
15	63	7
17	61	1
19	23	67
21	1	1
23*	83	27

11.5. $P = 13$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化. 周期は $(23-3)/2 = 10$

TABLE 24. $P = 13$

$2e + 1$	$Q = (13^{2e+1} - 1)/12$	分解	a
3	183	3*61	30927
5	30941	30941	883705901
7	5229043	5229043	25239591813787
9	883708281	A	B
11	149346699503	C	D
13	25239592216021	E	F
15	4265491084507563	G	H
17	720867993281778161	I	J
19	121826690864620509223	K	L
21	20588710756120866058701	M	N
23	3479492117784426363920483	O	P
25	588034167905568055502561641	Q	R
27	99377774376041001379932917343	S	T
29	16794843869550929233208663030981	U	V
31	2838328613954107040412264052235803	W	X
33	479677535758244089829672624827850721	Y	Z

11.6. $P = 13$ のときの弱弱完全数.

$$A = 3^2 * 61 * 1609669$$

$$B = 720867993213800601$$

$$C = 23 * 419 * 859 * 18041$$

$$D = 20588710756109377851047$$

$$E = 53 * 264031 * 1803647$$

$$F = 588034167905566113995468101$$

$$G = 3 * 61 * 4651 * 30941 * 161971$$

$$H = 16794843869550928905093964222707$$

$$I = 103 * 443 * 15798461357509$$

$$J = 479677535758244089774221240729252401$$

$$K = 12865927 * 9468940004449$$

$$L = 13700070098791209449615908553795581328767$$

$$M = 3 * 43 * 61 * 337 * 547 * 2714377 * 5229043$$

$$N = 391287702091575733090746033697803929523057501$$

$$O = 1381 * 2519545342349331183143$$

$$P = 11175568059437494512804842434187269399079517489227$$

$$Q = 701 * 9851 * 30941 * 2752135920929651$$

$$R = 319185399345594280780219112362033386548297277812147401$$

$$S = 3^3 * 61 * 650971 * 1609669 * 57583418699431$$

$$T = 9116254190709518253363838069456302175911679184810336544087$$

$$U = 1973 * 2843 * 3539 * 846041103974872866961$$

$$V = 260369335940854550834324579101958487505450742744381795527146101$$

$$W = 311 * 1117 * 8170509011431363408568150369$$

$$X = 7436408603806746826379144303731073041582189762751733789770879453347$$

11.7. $P = 41$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化. $P = 41$ のとき弱弱完全数の周期は 50. 本当だろうか.

TABLE 25. $P = 41$ 前半分; 下 2 桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	23	63
5	5	5
7	47	27
9	49	29
11	11	11
13	33	73
15	15	15
17	57	37
19	59	39
21	21	21
23	43	83
25	25	25
27	67	47
29	69	49
31	31	31
33	53	93
35	35	35
37	77	57
39	79	59

TABLE 26. $P = 41$ 後半分; 下 2 桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
47	87	67
49	89	69
51	51	51
53	73	13
55	55	55
57	97	77
59	99	79
61	61	61
63	83	23
65	65	65
67	7	87
69	9	89
71	71	71
73	93	33

TABLE 27. $P = 41$ 後半分; 下 2 桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
75	75	75
77	17	97
79	19	99
81	81	81
83	3	43
85	85	85
87	27	7
89	29	9
91	91	91
93	13	53
95	95	95
97	37	17
99	39	19
101	1	1
103*	23	63
105	5	5

周期は $(103 - 3)/2 = 50$

TABLE 28. $P = 43$; 下2桁

$p = 2\varepsilon - 1$	$Q = N_p$	$a = P^{p-1}Q$
3	93	57
5	1	1

11.8. $P = 43$; 弱弱完全数の p, Q, a 変化.

12. 弱弱完全数の周期

$p = 2\varepsilon - 1$ を奇数として, $Q = N_p = \frac{P^p - 1}{P}$, $a = P^{p-1}Q$ とおく. 周期を T とおくとき, p に $2T$ を加えても法を 100 として Q が不変であればよい. 周期なので不変にする T の中で最小に選ぶ.

100 を一般化して H とおき $M = \bar{P} \times H$ とする.

$$N_{p+2T} = \frac{P^{p+2T} - 1}{\bar{P}} \equiv N_p = \frac{P^p - 1}{\bar{P}} \pmod{H}$$

により

$$P^p - 1 \equiv P^{p+2T} - 1 \pmod{M}.$$

故に $P^p(P^{2T} - 1) \equiv 0 \pmod{M}$.

ここで, P と M は互いに素, とする. $H = 100$ なら $P \neq 2, 5$ なので妥当であろう.

$H = 10, 100, 1000$ のときを主に扱うが, $P = 2, P = 5$ は別扱いする.

12.1. $P = 5$ のときの周期. $P = 5$ のとき $\bar{P} = 4, M = 4H$ になり, $H = 400$ のとき

$$5^p(P^{2T} - 1) \equiv 0 \pmod{400}. \quad l = 2, p = 3 \text{ のとき}$$

$$5(5^{2T} - 1) \equiv 0 \pmod{16}$$

これより

$$5^2 \equiv 9, 5^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{16}$$

したがって, $T = 2$.

12.2. 周期の計算. 一般に $H = 100$ について $M = \overline{P} \times H$ とする.

$P^{2T} \equiv 1 \pmod{M}$ を満たす最小の T をパソコンで計算する.

TABLE 29. 弱弱完全数の周期 1

p	周期	周期の順	素数
3	10	1	199
7	2	2	7
11	25	2	43
13	10	2	107
17	10	2	149
19	5	2	157
23	10	2	193
29	10	2	257
31	25	2	293
37	10	5	19
41	50	5	59
43	2	5	79
47	10	5	139
53	10	5	179
59	5	5	239

TABLE 30. 弱弱完全数の周期 1

p	周期	周期の順	素数
61	50	10	3
67	10	10	13
71	25	10	17
73	10	10	23
79	5	10	29
83	10	10	37
89	10	10	47
97	10	10	53

TABLE 31. 弱弱完全数の周期 2

p	周期	周期の順	素数
101	50	10	67
103	10	10	73
107	2	10	83
109	10	10	89
113	10	10	97
127	10	10	103
131	25	10	109
137	10	10	113
139	5	10	127
149	2	10	137
151	25	10	163
157	2	10	167
163	10	10	173
167	10	10	197
173	10	10	223
179	5	10	227
181	50	10	229

TABLE 32. 弱弱完全数の周期 3

p	周期	周期の順	素数
191	25	10	233
193	2	10	263
197	10	10	269
199	1	10	277
211	25	10	283
223	10	25	11
227	10	25	31
229	10	25	71
233	10	25	131
239	5	25	151
241	50	25	191
251	25	25	211
257	2	25	251
263	10	25	271
269	10	50	41
271	25	50	61
277	10	50	101
281	50	50	181
283	10	50	241
293	2	50	281

13. 微弱完全数

14. 弱弱完全数の因数分解

弱弱完全数の因数分解の性質が見えないので $e + 1$ が奇素数のべきに絞ってみた. 案外おもしろいことがわかった.

一般に P を奇素数とし, $e + 1$ が奇素数のべき p^α のとき, $N_{p^\alpha} = \frac{Pp^\alpha - 1}{P}$ に関して $a_{p^\alpha} = P^e N_{p^\alpha}$ を P を底とする微弱完全数 (little w-perfect number) という.

N_{p^α} の各素因子 Q について $Q - 1$ の素因数分解が興味ある対象である.

14.1. $P = 2, p = 3$ の例.

1 ?- factor_qq(2,3^1).

[7]

6=[2,3]

2 ?- factor_qq(2,3^2).

[7,73]

6=[2,3] 72=[2^3,3^2]

3 ?- factor_qq(2,3^3).

[7,73,262657]

6=[2,3] 72=[2^3,3^2] 262656=[2^9,3^3,19]

4 ?- factor_qq(2,3^4).

[7,73,2593,71119,262657,97685839]

14.2. 証明. $P = 2$ に関して $M_{p^\alpha} = 2^{p^\alpha} - 1$ とおく.

上記の例により気がつくことは N_{p^α} の素因数分解の一部に $N_{p^{(\alpha-1)}}$ の素因数分解がそのまま出ていることである. 次にこのことを証明する.

$p^\alpha = p^{(\alpha-1)} \times p$ となるので $E = p^{\alpha-1}$, $F = p^\alpha$ とおくととき $F = E \times p$.

等比級数の公式を使う.

$$M_{p^\alpha} = 2^F - 1 = 2^{Ep} - 1 = (2^E - 1)((2^E)^{p-1} + \dots + 1) = M_{p^{(\alpha-1)}}((2^E)^{p-1} + \dots + 1).$$

M_{p^α} の因子として $M_{p^{(\alpha-1)}}$ が出る.

14.3. $P = 3, p = 5$ の例.

5 ?- factor_qq(3,5^1).

[11,11]

10=[2,5] 10=[2,5]

6 ?- factor_qq(3,5^2).

[11,11,8951,391151]

10=[2,5] 10=[2,5]

8950=[2,5^2,179] 391150=[2,5^2,7823]

14.4. $P = 5$ の例.

14.5. $P = 5, p = 3$.

1 ?- factor_qq(5,3).

[31]

30=[2,3,5]

8 ?- factor_qq(5,3^2).

[19,31,829]

18=[2,3^2]

30=[2,3,5]

828=[2^2,3^2,23]

9 ?- factor_qq(5,3^3).

[19,31,109,271,829,4159,31051]

18=[2,3^2]

30=[2,3,5]

108=[2^2,3^3]

14.6. $P = 7, p = 3.$

10 ?- factor_qq(7, 3^1).

[3, 19]

2=[2] 18=[2, 3^2]

11 ?- factor_qq(7, 3^2).

[3, 3, 19, 37, 1063]

2=[2] 2=[2] 18=[2, 3^2]

36=[2^2, 3^2] 1062=[2, 3^2, 59]

12 ?- factor_qq(7, 3^3).

[3, 3, 3, 19, 37, 109, 811, 1063, 2377, 2583253]

2=[2] 2=[2] 2=[2] 18=[2, 3^2]

14.7. $P = 2, p = 3, 5.$

1 ?- factor_qq(2,45).
[7,31,73,151,631,23311]

6=[2,3] 30=[2,3,5]

630=[2,3²,5,7]

23310=[2,3²,5,7,37]

72=[2³,3²]

150=[2,3,5²]

2 ?- factor_qq(2,5).

[31]

30=[2,3,5]

4 ?- factor_qq(2,3).

[7]

```
3 ?- factor_qq(2,9).  
[7,73]  
6=[2,3] 72=[2^3,3^2]
```

```
4 ?- factor_qq(2,3).  
[7]  
6=[2,3]
```