素因数色彩の理論 (素因数分布論) 要約

2018 年 3 月 3 日　浜田忠久

プラトンは $N\acute{o}\mu o\iota$(『法律』) の中で、都市国家における理想的な市民 (= 家長 = 有権者) の数を 5040 としています。米国の政治学者ロバート・ダールは *Size and Democracy* (1973) でこれを引用して、

> 「民主主義者ではないが、プラトンは、市民国がどの市民もお互いのことを知り、かつ友好であることができるくらいに小規模であることの望ましさを強調した。プラトンはさらに市民国の家長数の適正規模を 5040 人と算出することまでもした」(翻訳: 筆者)

と書いています。さらに米国のコミュニケーション論の研究者ジェームズ・ケアリーは *Communication as Culture* (1989) でダールの上記の著書を引用し、

> 「5040 という数は度を越して具体的過ぎるという誤りをおかしているが、万人参加へのデモクラシーの要請を表している。それよりも多人数だと民主的な議論は不可能である」(翻訳: 筆者)

と論じています。

プラトンは『法律』において、クレテ島内に建設すると想定されているモデル国家のあるべき姿を詳細に説明する中で、5040 という数は約数を 60 個もち、1 から 10 までのすべての整数でわりきれるから、公平な分配という観点から望ましい、と述べています。民主的な議論との関係についての記述は、残念ながら見当たりませんでした。

プラトン自身が問題にしたかどうかはともかく、民主的な議論や社会的決定と参加者数との関係は重要で興味深い問題なので別途議論したいと思いますが、ここでは、5040 の数としての特性について考えてみたいと思います。

まず、5040 は **階乗数** でありかつ **高度合成数** (highly composite number) です。高度合成数はラマヌジャンが考案した概念で、自然数で、それ未満のどの自然数よりも約数の個数が多いものを言います。

階乗数を小さい順に並べた数列、

$$(n!)_n = (1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots)$$

と、高度合成数を小さい順に並べた数列、

$$\begin{aligned}(HCN_n)_n =&(1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040,\\ &7560, 10080, 15120, 20160, 25200, 27720, 45360, 50400, 55440, 83160, 110880,\\ &166320, 221760, 277200, 332640, 498960, 554400, 665280, 720720, 1081080,\\ &1441440, 2162160, 2882880, 3603600, 4324320 \dots)\end{aligned}$$

を見比べると、$7!$ $(= 5040)$ 以下の階乗数はすべて高度合成数ですが、$8!$、$9!$、$10!$ は高度合成数ではありません。実は、$8!$ 以上の階乗数で、高度合成数となるものはありません。つまり、5040 は、階乗数でありかつ高度合成数となる最大の数なのです。

次に、最初の「合成数である高度合成数」(純高度合成数) の 4 から出発して、その数だけの個数の約数をもつ最小の数の列を作ると、

$$4 \to 6 \to 12 \to 60 \to 5040 \to 293318625600$$

という特別な高度合成数の列ができます。これを**プラトン高度合成数**と呼ぶことにします。プラトン高度合成数の列はどこまで続けることができるでしょうか。

293318625600 個の約数をもつ最小の数は

$$\begin{aligned}&670059168204585168371476438927421112933837297640990904154667968000000000000000\\&\fallingdotseq 6.7 * 10^{74}\end{aligned}$$

ですが、実はこれは高度合成数ではありません。つまりプラトン高度合成数は上記の 6 個しかありません。

このように、比較的小さい数において成り立っていることが巨大な数では必ずしも成り立たなくなることを説明するために役に立つ概念として、以下に述べる素因子指数列および素因数色彩の概念を導入します。

ある自然数 n が

$$n = {P_1}^{e_1} * {P_2}^{e_2} * \dots {P_m}^{e_m} \quad (\text{ただし、} P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5, \dots)$$

と素因数分解されるとき、n に

$$(e_i)_i = (e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_m,\ 0,\ \dots) = (\mathrm{ord}_{P_1} n,\ \mathrm{ord}_{P_2} n,\ \dots \mathrm{ord}_{P_m} n,\ 0,\ \dots) = (\mathrm{ord}_{P_i} n)_i \tag{44}$$

という数列を対応させ、その数列を「**素因子指数列**」(prime factor exponential sequence) と呼び、$\mathrm{pfes}(n)$ と書くことにします。また、素因子指数列を計算する際に指標となる個々の素数 P_i を **指標素数** (index prime number) と呼ぶことにします。ここで、$\mathrm{ord}_p n$ は n の p 進付値であり、有理数や代数的数の場合に自然に拡張することもできますが、本稿では自然数の範囲で議論します。

さて、1 を除く自然数の素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数の 「**素因数色彩**」 (prime factor color) と定義し (1 の素因数色彩は $(0)_i$ (すべての項が 0 の数列) とします)、$\mathrm{pfc}(n)$ と書くことにします。素因数色彩は、その数に含まれる素因数の分布を表す数列といえます。また、素因子指数列の最大値を、その数の**素因数色彩の強さ**と定義し、$\mathrm{s}(n)$ と書くことにします。

なお、(44) の最左辺と最右辺のように、素因子指数列や素因数色彩の指標素数の番号を表わす文字としては原則として「i」を用いることにし、一般の数列の項番号には「n」などを用いて区別することにします。

数列の素因子指数列、素因数色彩

ある数列 $(a_n)_n$ の各項に対応する素因子指数列や素因数色彩の各項が、収束あるいは n の関数で近似できる場合があります。例を挙げます。

階乗数 階乗数を小さい順に並べた数列、

$$(n!)_n = (1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots)$$

の各項の p 進付値は、

$$\frac{n+1}{P_i - 1} - \log_{P_i}(n+1) \le \mathrm{ord}_{P_i} n \le \frac{n}{P_i - 1} - 1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ord}_{P_i} n}{n} = \frac{1}{P_i - 1} - O\left(\frac{\log_{P_i} n}{n}\right)$$

よって、素因子指数列、素因数色彩の近似式は、

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfes}(n!) = \left(\frac{n}{P_i - 1}\right)_i \tag{45}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfc}(n!) = \left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i \tag{46}$$

となります。素因子指数列は n に比例する因数がつくので発散しますが、素因数色彩は収束します。また素因子指数列の各指標素数に対応する項を表わす式の第 2 項は、素因数色彩においては n を限りなく大きくするときに無視できます。

高度合成数 高度合成数を小さい順に並べた数列、

$$(HCN_n)_n$$
$$= (1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, \dots)$$

の各項の素因子指数列、素因数色彩の近似式は、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfes}(HCN_n) &= \left(\frac{\log HCN_n}{\omega(HCN_n)\log P_i}\right)_i \\ &= \frac{\log HCN_n}{\omega(HCN_n)}\left(\frac{1}{\log P_i}\right)_i \end{aligned} \tag{47}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfc}(HCN_n) = \left(\frac{1}{\log P_i}\right)_i \tag{48}$$

となります。ここで、自然数 n の相異なる素因数の数を $\omega(n)$ と表します。また、特に断りのない限り、log の底を 2 とします。素因子指数列は HCN_n に伴って限りなく大きくなる因数がつくので発散しますが、素因数色彩は収束します。

ある数列の各項に対応する素因数色彩に極限が存在するとき、その極限の素因数色彩を**極限色彩** と呼ぶことにします。階乗数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を階乗

数の極限色彩、高度合成数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を高度合成数の極限色彩と呼ぶことにします。それぞれ (46) および (48) で与えられます。

先に述べた、階乗数かつ高度合成数や、プラトン高度合成数が有限個しか存在しないという事実は、階乗数の極限色彩、高度合成数の極限色彩、また高度合成数の約数の数の極限色彩がすべて異なる数列となることから説明できます。

また、数列全体の素因子指数列、素因数色彩を考えることもできます。有限数列 (仮に A とします) の場合は、素因子指数列を、その数列の各項の素因子指数列の指標素数ごとの平均、と定義し、pfes(A) と書くことにします。$A = (a_1、a_2、\ldots、a_N)$ とすると、

$$\mathrm{pfes}(A) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} \right)_i$$

と書けます。つまり、その数列から無作為に項を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる数列と考えます。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数列の素因数色彩と定義し、pfc(A) と書くことにします。素因子指数列の最大値を、その数列の素因数色彩の強さと定義し、s(A) と書くことにします。

無限数列 (仮に B とします) に対しては、その数列の最初の N 個からなる有限数列の素因子指数列または素因数色彩について、N を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の各項の近似式が定まるとき、それらをその無限数列の素因子指数列または素因数色彩と定義し、pfes(B)、pfc(B) と書くことにします。$B = (b_n)_n$ とすると、

$$\mathrm{pfes}(B) = \left(\lim_{N\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} b_n}{N} \right)_i$$

と書けます。無限数列の素因子指数列または素因数色彩は、その無限数列の任意の項に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができます。

集合の素因子指数列、素因数色彩

自然数の集合の素因子指数列、素因数色彩については、その集合の元を小さい順に並べた数列を考えることにより、数列全体の素因子指数列、素因数色彩と全く同様に定義できます。

有限集合 (仮に A とします) の素因子指数列を、その集合の各元の素因子指数列の項ごとの平均、と定義し、pfes(A) と書くことにします。A の元を $a_1、a_2、\ldots、a_{|A|}$とすると、

$$\mathrm{pfes}(A) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{|A|} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{|A|} \right)_i$$

と書けます。つまり、その集合から無作為に元を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる数列と考えます。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その集合の素因数色彩と定義し、$\mathrm{pfc}(A)$ と書くことにします。素因子指数列の最大値を、その集合の素因数色彩の強さと定義し、$\mathrm{s}(A)$ と書くことにします。

自然数の無限集合 (仮に B とします) に対しては、その集合の元を小さい順に並べ、最初の N 個からなる有限集合の素因子指数列または素因数色彩について、N を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の各項の近似式が定まるとき、それらをその無限集合の素因子指数列または素因数色彩と定義し、$\mathrm{pfes}(B)$、$\mathrm{pfc}(B)$ と書くことにします。B の元を小さい順に並べたものを b_1、b_2、$\ldots$、とすると、

$$\mathrm{pfes}(B) = \left(\lim_{N\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} b_n}{N} \right)_i$$

と書けます。自然数の無限集合の素因子指数列または素因数色彩は、その無限集合の任意の元に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができます。

以下、いくつかの例を示します。

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ $\quad \{n\}_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right)$$
$$\mathrm{pfc}(\mathbb{N}) = \left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right)$$

どれだけ大きい自然数をとっても、その数以下の自然数の素因子 p の指数の期待値は高々 $\dfrac{1}{p-1}$ ということです。自然数の集合の素因数色彩を**自然色彩**と呼ぶことにします。

偶数 $\quad \{2\,n\}_n = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\{2\,n)_n) = \left(2,\ \frac{1}{P_2 - 1},\ \frac{1}{P_3 - 1},\ \ldots\right) = \left(2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{2\,n)_n) = \left(1,\ \frac{1}{2\,(P_2 - 1)},\ \frac{1}{2\,(P_3 - 1)},\ \ldots\right) = \left(1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \ldots\right)$$

奇数 $\quad \{2\,n - 1\}_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\{2\,n - 1\}_n) = \left(0,\ \frac{1}{P_2 - 1},\ \frac{1}{P_3 - 1},\ \ldots\right) = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{2\,n - 1\}_n) = \left(0,\ \frac{2}{P_2 - 1},\ \frac{2}{P_3 - 1},\ \ldots\right) = \left(0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots\right)$$

素数全体の集合 $\mathbb{P}$ 素数全体の集合 $\mathbb{P}$ の素因子指数列と素因数色彩は、

$$\mathrm{pfes}(\mathbb{P}) = (0)_i$$
$$\mathrm{pfc}(\mathbb{P}) = (1)_i$$

となります。

素数べきの集合 素数べき p^r (p は素数、r は自然数) の集合の素因子指数列は、

$$\mathrm{pfes}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = (0)_i$$

となります。素因数色彩は、

$$\mathrm{pfc}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = \left(\frac{1}{(\log P_i)^2}\right)_i$$

となります。

自然数の根基 自然数 n を無作為に採ったとき、その **根基** $\mathrm{rad}(n)$ (異なる素因数の積) の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{1}{P_i}\right)_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots\right)$$
$$\mathrm{pfc}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{2}{P_i}\right)_i = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \cdots\right)$$

素数の平行移動 m を 0 でない任意の整数の定数として、素数に m を加えた数 (「**素数の $\boldsymbol{m}$ 平行移動**」と呼ぶことにします) から 0 を除いた集合の素因子指数列および素因数色彩は、

$$\mathrm{pfes}(\{p+m \mid p \in \mathbb{P}, p+m \neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{(P_n-1)^2}\right)_i = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{7}{36}, \cdots\right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{p+m \mid p \in \mathbb{P}, p+m \neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{2\,(P_n-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right)$$

となります。

自然数のオイラー関数 N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、そのオイラー関数 $\varphi(n)$ の素因子指数列および素因数色彩の期待値は、N を限りなく大きくすると、下記の数列に近づきます。

$$\mathrm{pfes}((\varphi(n))_n) = (\infty)_i = (\infty, \infty, \infty, \infty, \cdots)$$
$$\mathrm{pfc}((\varphi(n))_n) = \left(\frac{P_n}{2\,(P_n-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right)$$

なお、指標素数 p が、初項が 1、公差が p のべきである等差数列上に素数が早めに現れる数、たとえばソフィー・ジェルマン素数 ($2p+1$ もまた素数であるような素数 p) の場合、N が比較的小さい値では、N 以下の自然数における素因子指数列および素因数色彩の期待値が高い値となり、たとえば $p = 31$ では $10p+1 = 311$ で初めて素数が現れるため、N が比較的小さい間は低い値となります。

三角数 $\{T_n\}_n = \left\{\dfrac{n\ (n+1)}{2}\right\}_n = \{1, 3, 6, 10, \dots\}$

$$\mathrm{pfes}\Big(\Big\{\frac{n\ (n+1)}{2}\Big\}_n\Big) = \Big(\frac{1}{P_1-1},\ \frac{2}{P_2-1},\ \frac{2}{P_3-1},\ \dots\Big) = \Big(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \dots\Big)$$
$$\mathrm{pfc}\Big(\Big\{\frac{n\ (n+1)}{2}\Big\}_n\Big) = \Big(\frac{1}{P_1-1},\ \frac{2}{P_2-1},\ \frac{2}{P_3-1},\ \dots\Big) = \Big(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \dots\Big)$$

二項係数 最初の N 個の二項係数 (binomial coefficient) から 要素 n を無作為に採るものとし、N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\frac{r}{2}} = 1$$
$$\therefore \lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\frac{\log N}{2\ \log p}} = 1$$

となります。したがって、二項係数の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}(\text{二項係数}) = \Big(\frac{\log N}{2\ \log P_i}\Big)_i = \frac{\log N}{2}\Big(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\Big)$$
$$\mathrm{pfc}(\text{二項係数}) = \Big(\frac{1}{\log P_i}\Big)_i = \Big(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\Big)$$

二項係数の素因数色彩は高度合成数の素因数色彩 (および極限色彩) と全く同じであることもわかります。これはパスカルの三角形の一部を観察してもなかなか予想できないことであり、驚くべき結果といえます。

フィボナッチ数 $\{F(n)\}_n = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)\right\}_n$
$= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{pfes}(\{F(n)\}_n) &= \Big(\frac{5}{6},\ \frac{P_i}{a(P_i)\ (P_i-1)}\Big)_i \\ &= \Big(\frac{5}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{48},\ \frac{11}{100},\ \frac{13}{168},\ \frac{17}{144},\ \frac{19}{324},\ \frac{23}{528},\ \frac{29}{392}, \dots\Big) \\ \mathrm{pfc}(\{F(n)\}_n) &= \Big(1,\ \frac{6\,P_i}{5\,a(P_i)\ (P_i-1)}\Big)_i \\ &= \Big(1,\ \frac{9}{20},\ \frac{3}{10},\ \frac{7}{40},\ \frac{33}{250},\ \frac{13}{140},\ \frac{17}{120},\ \frac{19}{270},\ \frac{23}{440},\ \frac{87}{980},\ \dots\Big)\end{aligned}$$

ここで、$a(m)$ は自然数 m のエントリー・ポイントを表します。任意の自然数 m に対して、m でわりきれるフィボナッチ数 $F(n)$ が存在しますが、このような n のうちで最小の自然数を、m のエントリー・ポイントと言います。

自然数の約数の数 重複する値があるため、集合ではなく数列として考えます。

$$(d(n))_n = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, \dots)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{pfes}((d(n))_n) &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{ord}_{P_i} k)\ (\zeta_{\mathrm{p}}(k-1) - \zeta_{\mathrm{p}}(k))\Big)_i \\
&\fallingdotseq (\infty,\ 0.30057, 0.04228, 0.00885, 0.00050, \dots) \\
\mathrm{pfc}((d(n))_n) &= (1, 0, 0, 0, \dots)
\end{aligned}$$

ここで、$\zeta_{\mathrm{p}}(s)$ は素数ゼータ関数です。このように、$\{d(n)\}_n$の素因子指数列は、指標素数 2 において発散し、3 以上のすべての指標素数において収束するという著しい結果が得られました。

自然数の約数の和 N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、その約数の和$\sigma(n)$ の、指標素数 p に対する p 進付値は以下の値に近づきます。

$p = 2$ のとき、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] = \sum_{i=2}^{\infty}\Big((P_i - 1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{P_i^{2j} - 1} + \frac{\mathrm{ord}_2(P_i + 1) - 1}{P_i + 1}\Big)$$

$p > 2$ のとき、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\,\sigma(n)\,] = \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p>1}}^{\infty}(P_i - 1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{P_i^{p^j\,\mathrm{O}_p P_i} - 1} + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p=1}}^{\infty}(P_i - 1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{P_i^{p^j} - 1}$$

上式より、自然数の約数の和の、指標素数 p における p 進付値は、$p = 2$ のときに発散し、$p > 2$ のときに収束することがわかります。

10^6(百万) 以下の自然数について約数の和の各素因子pの指数の期待値を計算した結果を表 23 に示します。

$p = 2$ の行で 3 と 7 の位数の値に $(\times 2)$ や $(\times 2)$ をつけているのは、(35) 式の無限和の中の第 2 項があるためで、$\mathrm{ord}_2(3 + 1) = 2$ および $\mathrm{ord}_2(7 + 1) = 3$ を示します。また、$p = 2$ の行の各項目や $p = 3$ の行で「7 の位数」が「(3)」となっているのは、$7^1 \equiv 1 \pmod 3$ なので 3 を法とする 7 の位数は 1 ですが、(38) 式にあるように、位数が 1 の場合は無限和の各項の分母の P_i の指数が 1 ではなく p の倍数で計算するため、p として ( ) の中に入れました。

表 23. $\sigma(n)$ の p 進付値の期待値 ($p = 31$ まで)

p	p 進付値	2 の位数	3 の位数	5 の位数	7 の位数	11 の位数
2	4.324325	–	(2)(× 2)	(2)	(2)(× 3)	(2)
3	1.776430	2	–	2	(3)	2
5	0.540818	4	4	–	4	(5)
7	0.478878	3	6	6	–	3
11	0.167498	10	5	5	10	–
13	0.185719	12	3	4	12	12
17	0.086396	8	16	16	16	16
19	0.120357	18	18	9	3	3
23	0.049584	11	11	22	22	22
29	0.036969	28	28	14	7	28
31	0.111774	5	30	3	15	30

全体に、指標素数 p が大きくなるほど p 進付値の値は小さくなる傾向がありますが、興味深いことに、$p = 13$、19、31 において逆転が起こっています。また、$p = 7$ の値は $p = 5$ の値からわずかしか小さくありません。その理由は以下のように説明できます。逆転が起こる指標素数は、比較的小さい素数の位数が小さいので、p 進付値の期待値が大きくなります。特に、3 と 7 と 31 はメルセンヌ素数なので、2 の位数が小さくなります。

素因子指数列の逆関数

ある数列が与えられたとき、それをある数の素因子指数列とみなして元の数を求めるという操作を考えてみます。つまり、数列 $(a_n)_n$ に対して $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n}$ を対応させる操作を、「**逆素因子指数列**」(inverse prime factor exponential sequence) と呼び、ipfes($(a_n)_n$) と書くことにします。

$$\mathrm{ipfes}(\ (a_n)_n\ ) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n} \tag{49}$$

(49) の右辺が発散するときは正の無限大に発散するので、ipfes の値も正の無限大とします。たとえば、引数として自然数全体の集合の素因子指数列、$\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\dfrac{1}{P_i - 1}\right)_i$ をとれば、

$$\mathrm{ipfes}(\ \mathrm{pfes}(\mathbb{N})) = \mathrm{ipfes}\Big(\ \left(\frac{1}{P_n - 1}\right)_n\ \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{P_n - 1}} = +\infty \tag{50}$$

となります。この値が正の無限大に発散することは、(50) の第 3 辺の対数をとって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log P_n}{P_n - 1}$$

が正の無限大に発散することからもわかります。

逆素因子指数列は、拡張実数 (実数に正負の無限大を加えた集合) を項とする数列全体を定義域とし、拡張実数を値域とする写像と考えることができます。数列が与えられるとそれに対応する逆素因子指数列が定まりますが、実数が与えられてもその実数を逆素因子指数列の値とする数列は一意に定まりません。

ある数列の素因子指数列の逆素因子指数列をその数列の「**素因子投影**」(prime factor projection) と呼び、pfp($(a_n)_n$) (= ipfes(pfes($(a_n)_n$))) と書くことにします。ある数列と、その素因子投影の間の関係について、以下の命題が成り立ちます。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはありませんが、元の数列の項として有理数や代数的数を考える場合、その p 進付値が負となる場合があるので、そのことを踏まえた命題とします。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはないので、その逆素因子指数列が収束するときは必ず絶対収束となります。

命題 9. ある数列 $(a_n)_n$ の素因子指数列 $(b_i)_i$ ($=\mathrm{pfes}((a_n)_n)$) の各項の絶対値が 0 でない有限の実数 ($0 < |b_i| < \infty$) で、その逆素因子指数列 (つまり元の数列の素因子投影) が絶対収束するとき、その値は元の数列の幾何平均の極限に一致する。すなわち、

$$\mathrm{ipfes}((b_i)_i) = \mathrm{pfp}((a_n)_n) = \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)^{\frac{1}{N}}$$

が成り立つ。□

これまでに見てきた自然数の無限集合の多くは、素因子投影が無限大となります。一般に、ある数列が正の無限大に発散する、つまり任意の実数 μ に対して自然数 $n_0(\mu)$ が定まって、

$$n > n_0(\mu) \longrightarrow a_n > \mu$$

となるとき、その数列の幾何平均も正の無限大に発散します。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \longrightarrow \lim_{N\to\infty} \Big(\prod_{n=1}^{N} a_n \Big)^{\frac{1}{N}} = +\infty$$

が成り立ちます。しかし、正の無限大に発散する数列であっても、その素因子投影が有限の値となる場合があります。つまり、自然数の無限集合であっても、その素因子投影が有限の値となるものがあるということです。典型的な例が素数全体の集合 $\mathbb{P}$ や素数べきの集合で、素因子指数列が $(\ 0\ )_i$ となるので、素因子投影は 1 となります。

さらに、数列の素因子投影が有限の値をもつための条件を詳しく考えてみます。たとえば (50) の左辺において P_n に 1 より大きい指数をつけることが考えられます。指数が 1 より大きい実数であれば有限の値となりますが、たとえば 2 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\frac{1}{{P_n}^2 - 1} \Big)_n \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^2-1}} \tag{51}$$

となります。(51) の右辺が収束することは、(50) と同様に対数をとればわかります。それでは、逆に (51) の左辺の引数の数列を素因子指数列とする元の数列を構成することはどのようにしてできるでしょうか。たとえば、第 n 項を、n の平方因子の平方根 (つまり $\sqrt{n}$ で n の平方因子を取り出して $\sqrt{n} = a\sqrt{b}$ と変形したときの a) とし、n が平方因子をもたないときは 1 とする数列

$$(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, \dots)$$

の素因子指数列は (51) の左辺の引数の数列に一致します。この数列自体は発散しますが、その素因子投影は有限の値となるということです。

また、(50) において P_n の指数を 3 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\frac{1}{{P_n}^3 - 1} \Big)_n \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^3-1}} \tag{52}$$

となります。左辺は、第 n 項を、n の立方因子の立方根 (つまり $\sqrt[3]{n}$ で n の立方因子を取り出して $\sqrt[3]{n} = a\sqrt[3]{b}$ と変形したときの a) とし、n が立方因子をもたないときは 1 とする数列の素因子指数列に一致します。

さて、自然数全体の集合 $\mathbb{N}\quad \{n\}_n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ の素因子指数列 (あるいは、自然数を小さい順に並べた数列 $(n)_n$ の素因子指数列とも言いかえられます) の逆素因子指数列 (つまり $\mathbb{N}$ の素因子投影) が正の無限大に発散することは前に見ましたが、自然数の並べ

替えとなる数列 (つまり $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射) で、素因子投影が有限の値になるものは存在するでしょうか。

実は、数列をうまく定義することにより、その素因子指数列を $(0)_i$、したがってその素因子投影を 1 にすることができます。

数列 $(a_n)_n$ を、n がある合成数 m の平方のとき $a_n = m$、ある合成数の平方でない n に対しては、a_n に 1 および素数を順次割り当てることにすると、

$$\begin{aligned}(a_n)_n = (&1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 4, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79,\\ &83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 6, 139, 149, \ldots)\end{aligned}$$

となります。ここで、$a_{16} = 4, a_{36} = 6, a_{64} = 8,$ などとなります。したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n &< \frac{\sqrt{N}}{(P_i - 1)}\\ \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} &< \frac{1}{\sqrt{N}(P_i - 1)}\\ \therefore \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} &= 0\\ \mathrm{pfes}((a_n)_n) &= (0)_i\\ \mathrm{pfp}((a_n)_n) &= 1\end{aligned}$$

このようにして、自然数の並べ替えとなる数列で、その素因子指数列が $(0)_i$ となるものが存在し、またその構成法の一つを示すことができました。

次に、自然数の並べ替えとなる数列の素因子指数列の項はどこまでの範囲の値を取り得るでしょうか。実は、以下の命題が成り立ちます。

命題 10. 各項が 0 以上の実数または正の無限大である任意の数列 $(b_i)_i$ $(b_i \geq 0)$ が与えられたとき、その数列を素因子指数列とする、自然数の並べ替えとなる数列 $(a_n)_n$ が存在する。□

自然数を小さい順に並べた数列の素因子指数列が $\left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$ であり、すべての指標素数に対して有限の値となっているにもかかわらず、それを並べ替えることによって、いずれの項も 0 以上の、無限大も含む任意の値をとる素因子指数列を生み出すことができるということは興味深いことと思われます。