素因数色彩の理論 (素因数分布論)

2018 年 3 月 1 日　浜田忠久

1　プラトンの遺した言葉

5040 という数をプラトンがどのように捉えていたのか、考えてみたいと思います。

プラトンは $N\acute{o}\mu o\iota$(『法律』) の中で、都市国家における理想的な市民 (= 家長 = 有権者) の数を 5040 としています。なぜ 5000 という「切りのいい数」ではなくあえて 5040 という (一見)「半端な数」を選んだのか、不思議に思いました。絶対に重要な意味があるに違いありません。5040 は言うまでもなく 7! (7 の階乗) であり、10 以下の自然数の最小公倍数の 2 倍です。

米国の政治学者ロバート・ダールは *Size and Democracy* (1973) でこれを引用して、

> 「民主主義者ではないが、プラトンは、市民国がどの市民もお互いのことを知り、かつ友好であることができるくらいに小規模であることの望ましさを強調した。プラトンはさらに市民国の家長数の適正規模を 5040 人と算出することまでもした」(翻訳: 筆者)

と書いています。さらに米国のコミュニケーション論の研究者ジェームズ・ケアリーは *Communication as Culture* (1989) でダールの上記の著書を引用し、

> Robert Dahl in *Size and Democracy* (1973) reminds us that Plato calculated the optimal number of citizens in a democracy as 5,040. The number does display the fallacy of misplaced concreteness, but it expresses the democratic desire for universal participation. Greater numbers would make democratic debate and discussion impossible. (p.3)

> 「5040 という数は度を越して具体的過ぎるという誤りをおかしているが、万人参加へのデモクラシーの要請を表している。それよりも多人数だと民主的な議論は不可能である」(翻訳: 筆者)

と論じています。

自分なりに考えてみたのですが、これはプラトンが理想的な政治体をどのように考えていたかを示す例ではないかということです。もし多数決による意思決定を重視していたのであれば、投票の数は奇数、あるいは選択肢が 3 つ以上ある場合も想定するなら、むしろ素数が望ましいということになります (つまり同数票により決着がつかないという事態を最大限回避できる)。しかし逆にプラトンは、約数を多くもつ数 (実は高度合成数でもある) 5040 を最適な数として選んだのです。これはつまり、市民をいくつかのグループに

分け、必要に応じてさらに何段階か細分化したグループに分け、グループ内の熟議を通して合意形成、意思決定をするのが望ましいと考えたのではないかと推察しました。

プラトンは『法律』において、クレテ島内に建設すると想定されているモデル国家のあるべき姿を詳細に説明する中で、5040 という数は約数を 60 個もち、1 から 10 までのすべての整数でわりきれるから、公平な分配という観点から望ましい、と述べています。民主的な議論との関係についての記述は、残念ながら見当たりませんでした。

プラトン自身が問題にしたかどうかはともかく、民主的な議論や社会的決定と参加者数との関係は重要で興味深い問題なので別途議論したいと思いますが、ここでは、5040 の数としての特性について考えてみたいと思います。

まず、5040 は **階乗数** でありかつ **高度合成数** (highly composite number) です。高度合成数はラマヌジャンが考案した概念で、自然数で、それ未満のどの自然数よりも約数の個数が多いものを言います。最初の 25 個の高度合成数は以下のようになります。

表 1. 高度合成数表

約数の個数	1	2	3	4	6	8	9	10	12	16	18	20	24	30	32
高度合成数	1	2	4	6	12	24	36	48	60	120	180	240	360	720	840

約数の個数	36	40	48	60	64	72	80	84	90	96
高度合成数	1260	1680	2520	5040	7560	10080	15120	20160	25200	27720

また、60 も高度合成数で 12 個の約数をもち、12 も高度合成数で 6 個の約数をもち、6 も高度合成数で 4 個の約数をもち、4 は合成数で最初の高度合成数です (1 と 2 は合成数でないし、自己循環するので省く)。仮に、合成数である高度合成数を純高度合成数と呼ぶことにすると、最初の純高度合成数の 4 から出発して、その数だけの個数の約数をもつ最小の数の列を作ると、(少なくとも 5040 までは) 高度合成数の列ができ、5040 はその列の 5 番目の数であるということです。言い換えると、4、6、12、60、5040、...は、高度合成数の中でもさらに特別な数だということです。これを**プラトン高度合成数**と呼ぶことにします。

プラトン高度合成数を追求する準備として、次節で高度合成数の性質を調べます。

2　高度合成数の性質

素数を小さい順に P_1 $(=2)$、P_2 $(=3)$、P_3 $(=5)$、$\ldots$ とします。ある自然数 n が

$$n = {P_1}^{e_1} \times {P_2}^{e_2} \times \ldots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、n の約数の数 $d(n)$ は

$$d(n) = \prod_{i=1}^{m}(e_i + 1)$$

となります。それぞれ対数をとると、

$$\log\ n = \sum_{i=1}^{m} e_i\ \log\ P_i$$
$$\log\ d(n) = \sum_{i=1}^{m} \log\ (e_i + 1)$$

となります。$d(n)$ は e_1、$\ldots e_m$についての対称式 (その中の任意の二つの文字を交換しても変わらない) なので、$d(n)$ が一定という条件のもとで n をなるべく小さい値にするには、$(e_i + 1)\ \log\ P_i$ の値をなるべく一定にすればよいことがわかります。つまり、素因数 2、3、5、$\ldots$の「指数 + 1」を、$\log\ 2$、$\log\ 3$、$\log\ 5$、$\ldots$ に反比例するように決めていくということです。言い換えれば、各素因数ごとの (指数に 1 を加えた) ベキ乗の値がなるべく均等になるようにする、としてもかまいません。

たとえば、24 個の約数をもつ最小の数を求めるには、$24 = 2^3 * 3$ と素因数分解した後、まず素因数をそのまま大きい順に並べて $24 = 3 * 2 * 2 * 2$ とし、各因数を 2、3、5、7 の指数とした値を並べます。その先も 11、13、17、$\ldots$と無限に素数が並んでいますが、11 以上の素数に対してはすべて指数が 1 と考えます。

2^3	3^2	5^2	7^2	11^1	$\ldots$
8	9	25	49	11	$\ldots$

上の表において素因数 7 に対応する値が比較的大きいので、24 の別の分解として $24 = 4 * 3 * 2$ を考え、各因数を 2、3、5 の指数とした値を並べます。

2^4	3^3	5^2	7^1	$\ldots$
16	27	25	7	$\ldots$

上の表の値の並びよりも、下の表の値の並びのほうが均等に近いといえます。実際、上の表に対応する n の値は $2^2 * 3 * 5 * 7 = 420$ で、下の表に対応する n の値は $2^3 * 3^2 * 5 = 360$ となり、より小さくなります。なお、$24 = 6 * 4$ と分解すると、

2^6	3^4	5^1	$\ldots$
64	81	5	$\ldots$

となり、64 と 81 なので、一見、より均等に見えるかもしれませんが、その次の 5 のベキのところが 5 なので、素因数 5 の指数として 1 よりも 2 を入れた方がより均等になると言えます。

したがって、$24 = 4 * 3 * 2$ の分解に対応する 360 が、24 個の約数をもつ最小の数となります。360 は高度合成数でもあります。

3　プラトン高度合成数の追究

いよいよ、プラトン高度合成数が 5040 の後どこまで続くか、追究してみたいと思います。まず、5040 個の約数をもつ最小の数を考えてみます。 5040 を素因数分解すると、

2^4*3^2*5*7 なので、素因数をそのまま大きい順に並べて $5040=7*5*3*3*2*2*2*2$ とし、各因数を 2、3、5、7、... の指数とした値を並べます。

$$\begin{array}{cccccccccc} 2^7 & 3^5 & 5^3 & 7^3 & 11^2 & 13^2 & 17^2 & 19^2 & 23^1 & \ldots \\ 128 & 243 & 125 & 343 & 121 & 169 & 289 & 361 & 23 & \ldots \end{array}$$

この並びは、どこをいじってもこれよりも不均等になってしまうので、これが 5040 個の約数をもつ最小の数となります。これは、

$$2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 293318625600 \text{ (約 3000 億)}$$

という巨大な数で、これも高度合成数になります。ただなにぶん、現在の世界人口の 40 倍以上の数なので、デモクラシーの議論では考えなくていいでしょう。(^^;)　なお、さらに続けて 293318625600 個の約数をもつ最小の数は、以下のようになります。

$$2^{18} \times 3^{16} \times 5^{12} \times 7^{10} \times 11^6 \times 13^6 \times 17^4 \times 19^4 \times 23^2 \times 29^2 \times 31^2 \times 37^2 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61$$
$$= 670059168204585168371476438927421112933837297640990904154667968000000000000000$$
$$\fallingdotseq 6.7 * 10^{74}$$

ただ、これは残念ながら高度合成数ではありません。　なぜなら、

$d(A)=2^6\times3^4\times5^2\times7^2\times11\times13\times17\times19 < 2^{32}\times3^4 = 347892350976\ (=9\times6\times4\times4\times3\times2^{27})$

ですが、右辺の数の約数をもつ数として、

$$2^8 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67$$
$$\times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97 \times 101 \times 103 \times 107 \times 109 \times 113 \times 127 \times 131$$
$$=734723660126677585098794281228301814570488775296459941440000 \fallingdotseq 7.3 \times 10^{59}$$

が存在しますが、これは A よりもはるかに小さい数です。

つまり、プラトン高度合成数は上記の 6 個しかありません。これで、プラトン高度合成数が有限であることがわかりました。その理由は、次節で述べる素因数色彩の理論で説明できそうです。

特別な高度合成数の別のアプローチ

プラトン高度合成数とは別の、特別な高度合成数の集合を考えることができます。たとえば、「それよりも大きい任意の高度合成数の約数となる高度合成数」はどのようなものになるでしょうか。1、2、6、12、60、2520、... と続くように見えますが、どのようにして確定し、また証明することができるでしょうか?

4　素因数色彩の理論

まず、「高度合成数でありかつ階乗数である数を特定する」という問題を考えてみます。7 以下の自然数の階乗はすべて高度合成数ですが、8 以上の自然数の階乗でかつ高度合成数となるものはどこまで行っても見つかりそうにありません。その理由は、高度合成数と階乗数をそれぞれ素因数分解したときの各素因子の指数の分布が異なる形に収束することで説明できるように思われます。

以下は、その理論化の試みです。

第 2節「高度合成数の性質」の冒頭で述べたように、素数を小さい順に $P_1\ (=2)$、$P_2\ (=3)$、$P_3\ (=5)$、$\ldots$ とし、ある自然数 n が

$$n = {P_1}^{e_1} * {P_2}^{e_2} * \ldots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、n に

$$(e_i)_i = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m,\ 0,\ \ldots) = (\mathrm{ord}_{P_1} n,\ \mathrm{ord}_{P_2} n,\ \ldots \mathrm{ord}_{P_m} n,\ 0,\ \ldots) = (\mathrm{ord}_{P_i} n)_i \quad (1)$$

という数列を対応させ、その数列を「**素因子指数列**」と呼ぶことにします。ここで $\mathrm{ord}_p n$ は、n を素因数分解したときの p の指数 (n の p 進付値と呼ばれます) を表します。なお、p 進付値を考えることにより n が有理数や代数的数の場合に自然に拡張することもできますが、本稿では自然数の範囲で議論することにします。また、素因子指数列を計算する際に指標となる個々の素数 P_i を**指標素数**と呼ぶことにします。

高度合成数 n に対応する素因子指数列は以下の数列に近づきます。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{k_n}{\log 2},\ \frac{k_n}{\log 3},\ \frac{k_n}{\log 5},\ \ldots,\ \frac{k_n}{\log P_m},\ 0,\ \right) \\
&= k_n\ \left(\frac{1}{\log P_1},\ \frac{1}{\log P_2},\ \ldots,\ \frac{1}{\log P_m},\ 0,\ \ldots\right) \qquad (2) \\
&\left(k_n = \frac{\log n}{\omega(n)},\ \omega(n)\ \text{は}\ n\ \text{の相異なる素因数の数}\right)
\end{aligned}$$

また、たとえば階乗数 $n = m!$ に対応する素因子指数列は以下の数列に近づきます。

$$\begin{aligned}
&\left(m,\ \frac{m}{2},\ \frac{m}{4},\ \ldots,\ \frac{m}{P_{\pi(m)}-1},\ 0,\ \ldots\right) \\
&= k_n\ \left(\frac{1}{P_1-1},\ \frac{1}{P_2-1},\ \ldots,\ \frac{1}{P_{\pi(m)}-1},\ 0,\ \ldots\right) \qquad (3) \\
&(k_n = m,\ \pi(m)\ \text{は}\ m\ \text{以下の素数の数})
\end{aligned}$$

このことは、以下のように考えると容易に理解できます。まず、$m!$ の素因子 2 の指数を考えます。1 から m までの自然数の中に、2 の倍数は $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ 個、$4 = 2^2$ の倍数

は $\left[\dfrac{m}{2^2}\right]$ 個、$8=2^3$の倍数は $\left[\dfrac{m}{2^3}\right]$ 個、... となるので、$m!$ の素因子 2 の指数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right]$ であり、この値は m を大きくしていくと m に近づきます。同様に、$m!$ の素因子 3 の指数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{3^i}\right]$ であり、この値は m を大きくしていくと $\dfrac{m}{2}$ に近づきます。一般に $m!$ の素因子 p の指数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]$ であり、この値は m を大きくしていくと $\dfrac{m}{p-1}$ に近づきます。以上より、(3) が導かれます。

このように、高度合成数も階乗数も、n を限りなく大きくしていくと、対応する数列は、初項に対する比が一定の規則に基づいた値に近づいていくことがわかります。

ある一定の性質をもつ自然数の集合に対して、素因子指数列とその極限の形を考えることにより、それらのいくつかの側面の比較をすることができます。高度合成数と階乗数の場合、式 (2) および (3) において、( ) 内の最大の項 (式 (2)、(3) の場合はいずれも初項) を 1 に揃えるために、(2) の log の底を 2 とすると、( ) 内の 1 で始まる数列 (期待値分布。各値の逆数が素因子に対して減少する速さを表す) が素因子の多様性を表し、k_n の形が n (精確には素因子 2 の指数) が大きくなる速さを表すと考えることができます。

そこで、新たに「**素因数色彩**」という概念を導入してみます。まず、1 を除く自然数の素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数の素因数色彩と定義し (1 の素因数色彩は $(0)_i$ (すべての項が 0 の数列) とします)、素因子指数列の最大値を、その数の**素因数色彩の強さ**と定義します。素因数色彩は、その数に含まれる素因数の分布を表す数列といえます。

たとえば、上記の n の素因子指数列に対し、$s(n) = \max e_i = \max \operatorname{ord}_{P_i} n$ とおくと $s(n)$ は n の素因数色彩の強さを表し、n の素因数色彩は、

$$\left(\frac{e_1}{s(n)},\ \frac{e_2}{s(n)},\dots\right)$$

となります。なお、素因子指数列を、以下のように「素因数色彩の強さ」と「素因数色彩」の積の形に表すことができます。

$$(\,e_1, e_2, \dots\,) = s(n)\left(\frac{e_1}{s(n)},\ \frac{e_2}{s(n)},\dots\right)$$

さて、ある数列の各項に対応する素因数色彩に極限が存在するとき、その極限の素因数色彩を **極限色彩** と呼ぶことにします。

高度合成数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を高度合成数の極限色彩、階乗数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を階乗数の極限色彩と呼ぶことにします。高度合成数の極限色彩は

$$\left(\frac{1}{\log P_n}\right)$$

となり、階乗数の極限色彩は

$$\left(\frac{1}{P_n-1}\right)$$

となります。

表 2. 高度合成数と階乗数の極限色彩

p	2	3	5	7	11	13	17	19
高度合成数	1.000	0.631	0.431	0.356	0.289	0.270	0.245	0.235
階乗数	1.000	0.500	0.250	0.167	0.056	0.083	0.063	0.056

ある自然数 n の素因数色彩に対応する数列とこれらの極限色彩との乖離度を、以下のように定義することにします。

高度合成数の極限色彩との乖離度:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}\Big(\frac{\mathrm{ord}_{P_i}\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{\log P_i}\Big)^2\\&=\Big(\frac{\mathrm{ord}_2\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{\log 2}\Big)^2+\Big(\frac{\mathrm{ord}_3\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{\log 3}\Big)^2\\&\quad+\cdots+\Big(\frac{\mathrm{ord}_{P_{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}}\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{\log P_{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}}\Big)^2\end{aligned}\tag{4}$$

log は 2 を底とする対数とします。$\mathrm{Maxp}(n)$ は n の最大素因子を表し、(4) 式は、
n の最大素因子の次の素数までの () 内の式の平方和を意味します。

階乗数の極限色彩との乖離度:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}\Big(\frac{\mathrm{ord}_{P_i}\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{P_i-1}\Big)^2\\&=\Big(\frac{\mathrm{ord}_2\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{2-1}\Big)^2+\Big(\frac{\mathrm{ord}_3\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{3-1}\Big)^2\\&\quad+\cdots+\Big(\frac{\mathrm{ord}_{P_{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}}\ n}{\max(\mathrm{ord}_{P_i}\ n)}-\frac{1}{P_{\pi(\mathrm{Maxp}(n))+1}-1}\Big)^2\end{aligned}\tag{5}$$

高度合成数と階乗数それぞれの極限色彩を比較すると、指標素数が大きくなるにつれて階乗数の極限色彩の方が急速に小さくなるので、極限色彩との乖離度は同じ尺度で比較することはできず、階乗数の乖離度の方が小さくなる傾向があります。同じくらいの規模の他の数との比較をすることにより、その違いを補正できると思われます。上記の解離度の計算式ももちろん絶対的なものではなく、n の大きさの規模を考慮に入れるなど、改善の余地があることを指摘しておきます。

200 万以下の高度合成数 40 個について、高度合成数および階乗数の極限色彩との乖離度を表 3 に示します。

表 3. 高度合成数の素因数色彩の乖離度

n	素因数分解	$d(n)$	乖離度 (高)	乖離度 (階)
1	1	1	1.000	1.000
2	2	2	0.398	0.250
4	2^2	3	0.398	0.250
6	$2 \cdot 3$	4	0.321	0.313
12	$2^2 \cdot 3$	6	0.203	0.063
24	$2^3 \cdot 3$	8	0.274	0.090
36	$2^2 \cdot 3^2$	9	0.322	0.313
48	$2^4 \cdot 3$	10	0.331	0.125
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	12	0.149	0.090
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	16	0.225	0.063
180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	18	0.268	0.340
240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	20	0.305	0.090
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	24	0.138	0.063
720	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	30	0.177	0.028
840	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	32	0.182	0.073

n	素因数分解	$d(n)$	乖離度 (高)	乖離度 (階)
1260	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	36	0.245	0.434
1680	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	40	0.273	0.079
2520	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	48	0.095	0.073
5040	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	60	0.145	0.017
7560	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	64	0.230	0.295
10080	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	72	0.214	0.024
15120	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	80	0.142	0.079
20160	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	84	0.278	0.045
25200	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	90	0.117	0.079
27720	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	96	0.086	0.124
45360	$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	100	0.264	0.267
50400	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	108	0.162	0.044
55440	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	120	0.136	0.036
83160	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	128	0.221	0.346
110880	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	144	0.212	0.031
166320	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	160	0.133	0.099
221760	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	168	0.282	0.046
277200	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	180	0.108	0.099
332640	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	192	0.160	0.031
498960	$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	200	0.255	0.286
554400	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	216	0.160	0.051
665280	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	224	0.211	0.018
720720	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	240	0.123	0.061
1081080	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	256	0.212	0.406
1441440	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	288	0.204	0.041

また、20!以下の階乗数 20 個について、高度合成数および階乗数の極限色彩との乖離度を表 4 に示します。

表 4. 階乗数 ($n = m!$) の素因数色彩の乖離度

m	n	素因数分解	$d(n)$	乖離度 (高)	乖離度 (階)
1	1	1	1	1.000	1.000
2	2	2	2	0.398	0.250
3	6	$2 \cdot 3$	4	0.321	0.313
4	24	$2^3 \cdot 3$	8	0.274	0.090
5	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	16	0.225	0.063
6	720	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	30	0.177	0.028
7	5040	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	60	0.145	0.017
8	40320	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	96	0.331	0.068
9	362880	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	160	0.215	0.027
10	3628800	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$	270	0.187	0.012
11	39916800	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	540	0.203	0.009
12	479001600	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	792	0.245	0.014
13	6227020800	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	1584	0.261	0.011
14	87178291200	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	2592	0.255	0.011
15	1307674368000	$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	4032	0.194	0.007
16	20922789888000	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	5376	0.307	0.019
17	355687428096000	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	10752	0.334	0.018
18	6402373705728000	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	14688	0.313	0.011
19	121645100408832000	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	29376	0.336	0.010
20	2432902008176640000	$2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	41040	0.356	0.012

次に、高度合成数と階乗数の極限色彩どうしの乖離度の増え方を見てみます。k 番目の素数までの乖離度を以下の式で計算します (log は 2 を底とする対数)。

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\log P_i} - \frac{1}{P_i - 1} \right)^2$$

表 5 に、最初の 10 個の素数まで (29 まで) で計算した高度合成数と階乗数の極限色彩どうしの乖離度を示します。

表 5. 高度合成数と階乗数の極限色彩どうしの乖離度

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
乖離度	0	0.017	0.050	0.086	0.121	0.156	0.190	0.222	0.253	0.282

表 3、表 4 から、高度合成数、階乗数ともに、大きくなるにつれて、その素因数色彩が極限色彩に近づくことがわかります。特に階乗数については、その高度合成数の極限色彩との乖離度が最も小さくなるのが $7! = 5040$ のときであり、それよりも値が大きくなるにつれて高度合成数の極限色彩との乖離度も大きくなる傾向にあることがわかります。そのことは表 5 で説明されます。つまり、高度合成数と階乗数の極限色彩どうしの乖離度は、その最大素因子が大きくなるにつれて増え続けます。表 5 では素因数として 29 までで乖離度が 0.282 という値を示しましたが、素因数が 47 まで (50 以下の素因数) で乖離度が 0.414、素因数が 97 まで (100 以下の素因数) で乖離度が 0.633 となります。

なお、8 以上の自然数の階乗が高度合成数にならないことは、その階乗数の素因子 2 の指数とその階乗数の最大素因子を比較することによっても証明できます。

次に、高度合成数の約数の数 (表 3 で $d(n)$ の列に現れる数) の素因数色彩について考えてみます。

表 6. 高度合成数の約数の数

n	素因数分解	n	素因数分解
1	1	72	$2^3 \cdot 3^2$
2	2	80	$2^4 \cdot 5$
3	3	84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$
4	2^2	90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$
6	$2 \cdot 3$	96	$2^5 \cdot 3$
8	2^3	100	$2^2 \cdot 5^2$
9	3^2	108	$2^2 \cdot 3^3$
10	$2 \cdot 5$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
12	$2^2 \cdot 3$	128	2^7
16	2^4	144	$2^4 \cdot 3^2$
18	$2 \cdot 3^2$	160	$2^5 \cdot 5$
20	$2^2 \cdot 5$	168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$
24	$2^3 \cdot 3$	180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	192	$2^6 \cdot 3$
32	2^5	200	$2^3 \cdot 5^2$
36	$2^2 \cdot 3^2$	216	$2^3 \cdot 3^3$
40	$2^3 \cdot 5$	224	$2^5 \cdot 7$
48	$2^4 \cdot 3$	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	256	2^8
64	2^6	288	$2^5 \cdot 3^2$

この素因数色彩の極限の一般形を導くことは簡単ではありませんが、第 6 節において、一般の自然数に対する約数の数の素因子指数列および素因数色彩を調べると、指標素数 2

の指数の期待値が無限大に発散することを示します (p. 38)。第 3 節で行った考察から、高度合成数の約数の数の素因数色彩は一般の自然数よりもさらに小さい指標素数の方に極端に偏っていることは間違いないものと思われます。証明は後の課題とさせていただきますが、このことにより、プラトン高度合成数が有限であることを説明できると思われます。

また、表 1 と表 6 を突き合わせて見ると、「高度合成数はすべてある高度合成数の約数の数になっている」という推測ができそうに見えますが、第 3 節の考察は、その反例の一つを示したものともいえます。このことも、「高度合成数」と「高度合成数の約数の数」の極限色彩が異なることから説明され、プラトン高度合成数が有限であることはその一例といえます。

このように、素因子指数列および素因数色彩は、巨大な数の性質を調べる際の道具として、有効な場合がありそうです。

素数階乗数 素数階乗数 $n\# = \prod_{i=1}^{\pi(n)} P_i$ に対応する素因子指数列および素因数色彩は以下の数列となります。

$$(\overbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}^{\pi(n)},\ 0,\ \ldots)$$

したがって、その極限色彩は、$(1)_i$ (すべての要素が 1 となる数列) です。

5 素因数色彩の性質

次に、素因数色彩の性質を調べてみます。

命題 1. 自然数 a、b の素因数色彩をそれぞれ $(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ とすると、a と b の積 $a\ b$ の素因数色彩は、$(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ の一次結合、つまり $(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ を一定の割合で混ぜ合わせたものになる。

具体的には、

$$\frac{s(a)}{s(a\ b)}\ (\ a_n\ ) + \frac{s(b)}{s(a\ b)}\ (\ b_n\ )$$

となる。□

また、自然数の有限集合の素因子指数列を、その集合の各元の素因子指数列の項ごとの平均、と定義します。つまり、その集合から無作為に元を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる素因子指数列と考えます。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その集合の素因数色彩と定義し、素因子指数列の最大値を、その集合の素因数色彩の強さと定義します。

つまり、自然数の有限集合 A の各元 n_iが P_1 $(=2)$、P_2 $(=3)$、P_3 $(=5)$、...、の各素数に対して

$$n_i = {P_1}^{e_{i\,1}} * {P_2}^{e_{i\,2}} * \dots {P_m}^{e_{i\,m}}$$

と素因数分解されるとき、A の素因子指数列は

$$\left(\frac{\sum e_{i\,1}}{|A|},\ \frac{\sum e_{i\,2}}{|A|}, \dots \right) = \left(\frac{\mathrm{ord}_{P1}\left(\prod n_i\right)}{|A|},\ \frac{\mathrm{ord}_{P2}\left(\prod n_i\right)}{|A|},\ \dots \right)$$

となります。$s(A) = \max_j \left(\frac{\sum e_{i\,j}}{|A|} \right) = \max_j \left(\frac{\mathrm{ord}_{P_j} \prod e_{i\,j}}{|A|} \right)$ とおくと $s(A)$ は A の素因数色彩の強さを表し、A の素因数色彩は、

$$\left(\frac{\sum e_{i\,1}}{s(A)\ |A|},\ \frac{\sum e_{i\,2}}{s(A)\ |A|}, \dots \right)$$

となります。なお、素因子指数列を、以下のように「素因数色彩の強さ」と「素因数色彩」の積の形に表すことができます。

$$\left(\frac{\sum e_{i\,1}}{|A|},\ \frac{\sum e_{i\,2}}{|A|}, \dots \right) \ = \ s(A) \ \left(\frac{\sum e_{i\,1}}{s(A)\ |A|},\ \frac{\sum e_{i\,2}}{s(A)\ |A|}, \dots \right)$$

たとえば、A を 10 以下の自然数の集合、つまり $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ とすると、A の素因子指数列は

$$(\frac{8}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{1}{10},\ 0, \dots)$$

であり、A の素因数色彩は

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ 0, \dots \right)$$

また A の素因数色彩の強さ $s(A)$ は $\dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ です。

また、B を最初の 5 個の三角数の集合、つまり $A = \{1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15\}$ とすると、B の素因子指数列は

$$(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0, \dots)$$

であり、B の素因数色彩は

$$\left(\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{2}{3},\ 0, \dots \right)$$

また B の素因数色彩の強さ $s(B)$ は $\dfrac{3}{5}$ です。

命題 2. 自然数の有限集合 A、B の素因数色彩をそれぞれ $(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ とすると、A と B の和集合、および A の元と B の元の積の集合の素因数色彩は、重複を省かないで数えれば $(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ の一次結合、つまり $(\ a_n\ )$、$(\ b_n\ )$ を一定の割合で混ぜ合わせたものになる。

具体的には、A と B の和集合 $A \cup B$ の素因数色彩は、

$$\frac{s(A)\ |A|}{s(A\cup B)(|A|+|B|)}\ (\ a_n\ ) + \frac{s(B)|B|}{s(A\cup B)(|A|+|B|)}\ (\ b_n\ )$$

となり、A の元と B の元の積の集合 ($P(A,B)$ とおく) の素因数色彩は、

$$\frac{s(A)}{s(P(A,B))}\ (\ a_n\ ) + \frac{s(B)}{s(P(A,B))}\ (\ b_n\ )$$

となる。□

6 無限集合の素因数色彩

自然数の無限集合に対しては、その集合の元を小さい順に並べ、最初の N 個からなる有限集合の素因子指数列または素因数色彩について、N を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の各項の極限が定まるとき、それらをその無限集合の素因子指数列または素因数色彩と定義します[1]。自然数の無限集合の素因子指数列または素因数色彩は、その無限集合の任意の元に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができます。

以下、いくつかの例を示します。なお、事象 A がおこる確率を Pr[A]、確率変数 X の期待値を E[X] で表します。

6.1 自然数全体の集合 ℕ

N 以下の自然数から n を無作為に採ったとき、n の素因子 p の指数の期待値は以下のようになります。

$$E[\mathrm{ord}_p\, n] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p^i}\right]$$

N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$$\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_p\, n] = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の自然数 n に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となります。

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{P_1-1},\ \frac{1}{P_2-1},\ \dots\Big)\\ =&\Big(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \dots\Big)\end{aligned}$$

[1]必ずしも極限が定まらなくても、各項が N の関数で近似できるとき、素因子指数列または素因数色彩を N の関数で表すという考え方もあり得ます。

このことは、以下のように考えると容易に理解できます。任意の自然数 n が 2 の倍数である確率は $\dfrac{1}{2}$、$4=2^2$ の倍数である確率は $\dfrac{1}{2^2}$、$8=2^3$ の倍数である確率は $\dfrac{1}{2^3}$、$\ldots$ となるので、n の素因子 2 の指数の期待値は $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ であり、この値は 1 となります。同様にして、一般に n の素因子 p の指数の期待値は $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^i}$ であり、この値は $\dfrac{1}{p-1}$ となります。

いかがでしょうか。どれだけ大きい自然数をとっても、その数以下の自然数の素因子 p の指数の期待値は高々 $\dfrac{1}{p-1}$ ということです。たとえば素因子 2 の指数の期待値は 1 以下にしかならないのです。よく考えれば納得できる結果ですが、直感を裏切る結果と言えないでしょうか。また、興味深いことに、素因数色彩が階乗数と同じ形です。自然数全体の集合の素因数色彩を**自然色彩**と呼ぶことにします。

6.2　偶数

最初の N 個の偶数から $n=2\,m\ (1\le m\le N)$ を無作為に採ったとき、n の素因子 p の指数の期待値は以下のようになります。

$p=2$ の場合

$$E[\mathrm{ord}_p\,n]=1+\sum_{i=1}^{[\log_p N]}\frac{1}{[N]}\left[\frac{N}{p^i}\right]$$

$p>2$ の場合

$$E[\mathrm{ord}_p\,n]=\sum_{i=1}^{[\log_p N]}\frac{1}{[N]}\left[\frac{N}{p^i}\right]$$

N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$p=2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty}E[\mathrm{ord}_p\,n]=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^i}=1+\frac{1}{p-1}=2$$

$p>2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty}E[\mathrm{ord}_p\,n]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^i}=\frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の偶数 $n = 2\,m$ に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となります。

$$\begin{aligned}&\left(2,\ \frac{1}{P_2-1},\ \frac{1}{P_3-1},\ \ldots\right)\\ =\ &2\ \left(1,\ \frac{1}{2\,(P_2-1)},\ \ldots, \frac{1}{2\,(P_{\pi(m)}-1)},\ 0,\ \ldots\right)\end{aligned}$$

6.3 奇数

最初の N 個の奇数から $n = 2\,m - 1$ $((1 \leq m \leq N)$ を無作為に採ったとき、n の素因子 p の指数の期待値は以下のようになります。

$p = 2$ の場合

$$E[\operatorname{ord}_p n] = 0$$

$p > 2$ の場合

$$E[\operatorname{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{[\log_p(2\,N-1)]} \frac{1}{N}\left(\left[\frac{2\,N-1}{p^i}\right] - \left[\frac{N}{p^i}\right]\right)$$

N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$p = 2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty} E[\operatorname{ord}_p n] = 0$$

$p > 2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty} E[\operatorname{ord}_p n] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}$$

したがって、任意の奇数 $n = 2\,m - 1$ に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となります。

$$\begin{aligned}&\left(0,\ \frac{1}{P_2-1},\ \frac{1}{P_3-1},\ \ldots\right)\\ =\ &\frac{1}{2}\ \left(0,\ \frac{2}{P_2-1},\ \frac{2}{P_3-1},\ \ldots\right)\end{aligned}$$

6.4 三角数

最初の N 個の三角数から $n = \dfrac{m\ (m+1)}{2}$ $(1 \leq m \leq N)$ を無作為に採ったとき、n の素因子 p の指数の期待値を求めてみます。

$p = 2$ の場合

$$E[\mathrm{ord}_p\, n] = -1 + \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{[\log_p (N+1)]} \frac{1}{N}\left[\frac{N+1}{p^i}\right]$$

$p > 2$ の場合

$$E[\mathrm{ord}_p\, n] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{[\log_p (N+1)]} \frac{1}{N}\left[\frac{N+1}{p^i}\right]$$

N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$p = 2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_p\, n] = -1 + 2 \cdot \frac{1}{p-1} = 1$$

$p > 2$ の場合

$$\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_p\, n] = 2 \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-1}$$

したがって、任意の三角数 $n = \dfrac{m\ (m+1)}{2}$ に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となります。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{P_1 - 1},\ \frac{2}{P_2 - 1},\ \frac{2}{P_3 - 1},\ \ldots\right) \\ =&\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots\right) \end{aligned}$$

つまり、$\mathbb{N}$ とほぼ同じ形ですが、2 の指数の期待値だけ、$\mathbb{N}$ の場合の半分になっています。偶数と対称的ですね。このことから、以下の問題が思い浮かびます。

- 階乗数を 三角数 $\times$ 奇数 の形に分解できる場合をすべて求めよ。
- 任意の階乗数 $n = m!$ は 三角数 $\times$ 偶数 の形に何通りに分解できるか。
- 任意の階乗数 $n = m!$ の約数となる三角数で最大のものは何か。
- 任意の三角数 $n = \dfrac{m\ (m+1)}{2}$ の倍数となる階乗数で最小のものは何か。

さらに四角数 (平方数)、五角数、一般の多角数[2]、n 次元多胞体数などについても考察が可能です。

[2] n 番目の p 角数は $\dfrac{(p-2)n^2 - (p-4)n}{2}$ と表わせます。

6.5 フィボナッチ数

最初の N 個のフィボナッチ数

$$F(m)=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m\Big)\ (1\le m\le N)$$

から $F(m)$ を無作為に採ったとき、$F(m)$ の素因子 p の指数の期待値を求めてみます。まず、フィボナッチ数の強整除性により、$m>2$ のとき、$m\mid n \iff F(m)\mid F(n)$
なので、自然数 m のエントリー・ポイント[3]を $a(m)$ と置くと、

$$E[\mathrm{ord}_p F(m)]=\sum_{i=1,\ a(p^i)\le N}^{\infty}\frac{1}{N}\Big[\frac{N}{a(p^i)}\Big]$$

$$\therefore\qquad \lim_{N\to\infty}E[\mathrm{ord}_p F(m)]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a(p^i)}$$

が成り立ちます。したがって、各 p^i のエントリー・ポイントが決まれば、素因子指数列を計算することができます。ここで、以下の命題が成り立ちます[4]。

命題 3. 任意の奇素数 p および 0 以上の整数 n に対して

$$\mathrm{ord}_p F(a(p)*p^n)-\mathrm{ord}_p F(a(p))=n$$

が成り立つ[5]。この式は $p=2$、$n=0$ に対しても成り立つが、1 以上の整数 n に対しては

$$\mathrm{ord}(2,F(a(2)*2^n))=n+2$$

が成り立つ。□

証明. m 番目のフィボナッチ数は

$$F(m)=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m\Big)$$

と表され、m 番目のリュカ数は

$$L(m)=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^m$$

と表される。したがって、

$$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m=\frac{L(m)+F(m)\sqrt{5}}{2}\tag{6}$$

[3]任意の自然数 m に対して、m でわりきれるフィボナッチ数 $F(n)$ が存在しますが、このような n のうちで最小の自然数を、m のエントリー・ポイントと言います。

[4]証明にあたり、水谷一氏から多大なる助言をいただきました。

[5]$p=5$ の場合は $a(5)=5$ なので $a(5)*5^n=5^{n+1}$ となり、注意が必要です。

が成り立つ。2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ において、$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^m$ は $a_m + b_m\ \sqrt{5}\ \ (a_m, b_m \in \mathbb{Q})$ の形に一意に表されるが、式 (6) は、その時の $\sqrt{5}$ の係数 b_m が $\dfrac{F(m)}{2}$ に他ならないことを示す。

さて、$F(m)$ が素数 p の倍数となるとき、$F(m) = k\ p^e,\ (p,k) = 1\ (k, e$ は自然数)
とおけることから、

$$\begin{aligned}
(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^m &= \frac{L(m) + k\ p^e\ \sqrt{5}}{2} \\
(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{m\ p} &= (\frac{L(m) + k\ p^e\ \sqrt{5}}{2})^p \\
&= \frac{1}{2^p}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}L(m)^{p-i}(k\ p^e\ \sqrt{5})^i \\
&= \frac{1}{2^p}\Big(\sum_{i=0}^{[\frac{p}{2}]}\binom{p}{2\ i}L(m)^{p-2\,i}(k\ p^e)^{2\,i}5^i + \sqrt{5}\sum_{i=0}^{[\frac{p-1}{2}]}\binom{p}{2\ i+1}L(m)^{p-2\,i-1}(k\ p^e)^{2\,i+1}\ 5^i\Big)
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad F(m\ p) = \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{i=0}^{[\frac{p-1}{2}]}\binom{p}{2\ i+1}L(m)^{p-2\,i-1}(k\ p^e)^{2\,i+1}\ 5^i \tag{7}$$

$(F(m), L(m)) = 1$ または 2 なので、p が奇素数のとき、$p \nmid L(m)$ であるから、
式 (7) の p の指数に注目すると、

$$\mathrm{ord}_p\, F(m\ p) = e + 1$$

よって p が奇素数の場合は証明された。

$p = 2$ の場合、任意の自然数 n について

$$F(2\ n) = F(n)\ L(n)$$

が成り立つから、

$$\mathrm{ord}_2\, F(2\,m) = \mathrm{ord}_2\, F(m) + \mathrm{ord}_2\, L(m)$$

$$\therefore \qquad \mathrm{ord}_2\, F(2^e\, m) - \mathrm{ord}_2\, F(2^{e-1}\, m) = \mathrm{ord}_2\, L(2^{e-1}\, m)$$

である。また、

$$L(2\,m) = L(m)^2 + (-1)^{m-1}\cdot 2$$

より、$L(m)$ が偶数であれば $\mathrm{ord}_2\, L(2\,m) = 1$ であり、さらに $\mathrm{ord}_2\, L(2^e\, m) = 1$
$(e \geq 1)$ すなわち

$$\mathrm{ord}_2\, F(2^e\, m) - \mathrm{ord}_2\, F(2^{e-1}\, m) = 1\ (e \geq 2)$$

である。

$a(2) = 3$、$F(3) = 2$、$L(3) = 4$ であるから、$p = 2$ の場合についても証明された。 ■

ここで、フィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩を計算してみます。

$$\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_2 F(m)] = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{12\cdot 2^i} = \frac{5}{6}$$

奇素数 p については、命題 3 より、

$$\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_p F(m)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a(p)\cdot p^i} = \frac{p}{a(p)\ (p-1)}$$

よって、

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_3 F(m)] &= \frac{3}{4\cdot 2} = \frac{3}{8}\\ \lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_5 F(m)] &= \frac{5}{5\cdot 4} = \frac{1}{4}\\ &\cdots\end{aligned}$$

したがって、任意のフィボナッチ数 $F(m)$ に対応する素因子指数列および素因数色彩の期待値は以下の数列となります。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{48}, \frac{11}{100}, \frac{13}{168}, \frac{17}{144}, \frac{19}{324}, \frac{23}{528}, \frac{29}{392}, \dots\right)\\ =\ &\frac{5}{6}\left(1, \frac{9}{20}, \frac{3}{10}, \frac{7}{40}, \frac{33}{250}, \frac{13}{140}, \frac{17}{120}, \frac{19}{270}, \frac{23}{440}, \frac{87}{980}, \dots\right)\end{aligned}$$

表 10 にフィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩の近似値を示します。

表 10. フィボナッチ数全体の素因子指数列および素因数色彩 ($p = 19$ まで)

p	2	3	5	7	11	13	17	19
素因子指数列	0.8333	0.375	0.25	0.1458	0.11	0.1548	0.1181	0.0586
素因数色彩	1	0.45	0.3	0.175	0.132	0.1857	0.1417	0.0704

なお、$p > 5$ で、$\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ (平方剰余) つまり $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき、$F(p-1) \equiv 0 \pmod p$ であり、$\left(\frac{5}{p}\right) = -1$ (平方非剰余) つまり $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき、$F(p+1) \equiv 0 \pmod p$ であるから、$a(p)$ は $p - \left(\frac{5}{p}\right)$ の約数ということがいえます。

また、p の大きさの割に $a(p)$ が小さい数、つまりフィボナッチ数の素因数として早めに現れる数、13、17、89、233、1597 などの指標素数に対する値は自然色彩に比べて高くなることになります。これはフィボナッチ数全体の素因数色彩の特徴の一つといえます。

$p < 100,000$ となるすべての素数について、エントリー・ポイントにおけるフィボナッチ数を素因数分解したときの p の指数が 1 であることを確認しました。そこで、以下の命題が成り立つと予想します。

予想 1. 任意の素数 p について $\mathrm{ord}_p F(a(p)) = 1$ □

この予想が成り立つなら、命題3は次のように言い換えることができます。

予想 2. 任意の奇素数 p および 0 以上の整数 n に対して

$$\mathrm{ord}_p\, F(a(p) * p^n) = n + 1$$

が成り立つ。この式は $p = 2$、$n = 0$ に対しても成り立つが、1 以上の整数 n に対しては

$$\mathrm{ord}_2\, F(a(2) * 2^n) = n + 2$$

が成り立つ。 □

現時点ではこれらの予想は真偽を明言できませんが、今後明らかにしたいと考えます。
なお、フィボナッチ数で行ったのと同様の議論が、リュカ数、一般フィボナッチ数列、一般リュカ数列、ワイソフ配列などについても行えます。

6.6 素数の平行移動

自然数 n のオイラー関数 (Euler's totient function, n 以下の自然数のうち n と互いに素なものの個数) $\varphi(n)$ を考察する準備として、まず素数 p のオイラー関数 $\varphi(p) = p - 1$ について考察します。
N 以下の素数 p を無作為に採ったとき、$p - 1$ の素因子指数列を考えてみます。

$$\begin{aligned}
E[\,\mathrm{ord}_{P_i}(p-1)\,] &= \sum_{p \le N} \sum_{j=1}^{[\log_{P_i} N]} j\ Pr[\,\mathrm{ord}_{P_i}(p-1) = j\,] \\
&= \sum_{p \le N} \sum_{j=1}^{[\log_{P_i} N]} Pr[\,P_i^j \mid (p-1)\,] \\
&= \sum_{p \le N} \sum_{j=1}^{[\log_{P_i} N]} Pr[p \equiv 1 \pmod{P_i^j}\,]
\end{aligned} \tag{8}$$

N を限りなく大きくしたときの各指標素数 P_i に対する指数の期待値の極限を考察する準備として、Dirichlet (ディリクレ) の算術級数定理と算術級数の素数定理について述べます。

定理 1. (ディリクレの算術級数定理) $n, d \in \mathbb{Z}, (n, d) = 1$ であれば、

$$p \equiv n \pmod d$$

となる素数 (すなわち $p = n + k\,d (k \in \mathbb{Z})$) と表わされる素数)$p$ が無限に多く存在する。(Dirichlet, 1837) □

ディリクレはこの定理を L 関数 の概念を導入して証明しましたが、その証明は非常に難解です (高木 (1931)、河田 (1978) などで紹介されています)。その証明の中で、定理の仮定を満たす等差数列上の素数の逆数の和が発散することを用いていますが、次節「自然数のオイラー関数」でその事実を使います。この定理の証明には、現在までにディリクレの類数公式を用いる方法 (Dirichlet, 1837) と、解析的な方法 (de La Vallée Poussin (ド・ラ・ヴァレー・プーサン), 1896) の 2 通りが知られているようです (加藤・黒川・斎藤, 2005)。また、黒川 (2014) にも証明の概略が紹介されています。なお、河田 (1978) ではこの定理を「算術級数における素数定理」と呼んでおり、次に述べる「算術級数の素数定理」(上記の証明を改良することにより導かれます) と混同しないよう、注意が必要です。

定理 2. (算術級数の素数定理) $n, d \in \mathbb{Z}, (n, d) = 1$ であれば、

$$p \equiv n \pmod{d}$$

となる素数 (すなわち $p = n + k\,d(k \in \mathbb{Z})$) と表わされる素数)$p$ で、x 以下のものの個数を $\pi_{d,a}(x)$ で表わすとき、

$$\pi_{d,a}(x) \sim \frac{1}{\varphi(d)} \frac{x}{\log x}$$

となる。(de La Vallée Poussin , 1896) □

なお、$\pi(x)$ の近似式として $\dfrac{x}{\log x}$ の代わりに、

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \right) \frac{d\,u}{\log u} = \mathrm{Li}(2) + \int_2^x \frac{d\,u}{\log u}$$

$$(\mathrm{Li}(2) = 1.045\ldots)$$

もよく用いられます。

算術級数の素数定理を用いると、(8) の極限は、

$$\begin{aligned}
\lim_{N \to \infty} E[\,\mathrm{ord}_{P_i}(p-1)\,] &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(P_i^{\,j})} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_i^{\,j-1}(P_i - 1)} \\
&= \frac{1}{P_i - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_i^{\,j-1}} \\
&= \frac{1}{P_i - 1} \frac{P_i}{P_i - 1} \\
&= \frac{P_i}{(P_i - 1)^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

となります。となります。したがって、素数から 1 を引いた数の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}((p-1 \mid p \in \mathbb{P})) = \left(\frac{P_i}{(P_i-1)^2}\right)_i = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{7}{36}, \cdots\right) \tag{10}$$

$$\mathrm{pfc}((p-1 \mid p \in \mathbb{P})) = \left(\frac{P_i}{2\,(P_i-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right) \tag{11}$$

表 12 に $p-1$ の素因子指数の合計、表 13.に $p-1$ の素因子指数列の期待値、表 14.に $p-1$ の素因数色彩の期待値を、それぞれ $P_i = 37$ まで、$N = 10^1$から $N = 10^7$ までと $N = \infty$ とした極限を計算した値を記します。

表 12. $p-1$ の素因子指数の合計 ($P_i = 37$ まで)

p	2	3	5	7	11	13	$\pi(N)$
$N = 10^1$	4	1	0	0	0	0	4
$N = 10^2$	43	14	5	3	3	2	25
$N = 10^3$	324	121	49	31	18	14	168
$N = 10^4$	2411	919	380	235	137	107	1229
$N = 10^5$	19143	7182	2987	1846	1034	861	9592
$N = 10^6$	156772	58793	24533	15228	8621	7093	78498
$N = 10^7$	1328609	498159	207480	129138	73034	59966	664579

p	17	19	23	29	31	37	$\pi(N)$
$N = 10^1$	0	0	0	0	0	0	4
$N = 10^2$	0	0	1	1	0	0	25
$N = 10^3$	10	7	8	5	3	3	168
$N = 10^4$	81	64	55	43	38	36	1229
$N = 10^5$	640	549	444	358	330	270	9592
$N = 10^6$	5174	4573	3737	2912	2670	2229	78498
$N = 10^7$	44100	38861	31556	24604	22859	18992	664579

表 13. $p-1$ の素因子指数列の期待値 ($P_i = 37$ まで)

p	2	3	5	7	11	13
$N = 10^1$	1	0.25	0	0	0	0
$N = 10^2$	1.72	0.56	0.2	0.12	0.12	0.08
$N = 10^3$	1.9285714	0.7202381	0.2916667	0.1845238	0.1071429	0.0833333
$N = 10^4$	1.9617575	0.7477624	0.3091946	0.1912124	0.1114727	0.0870627
$N = 10^5$	1.9957256	0.7487490	0.3114053	0.1924520	0.1077982	0.0897623
$N = 10^6$	1.9971464	0.7489745	0.3125303	0.1939922	0.1098245	0.090359
$N = 10^7$	1.9991739	0.7495858	0.3121976	0.1943155	0.1098951	0.090232
$\dots$			$\dots$			
$N \to \infty$	2	0.75	0.3125	0.1944444	0.11	0.0902778

p	17	19	23	29	31	37
$N = 10^1$	0	0	0	0	0	0
$N = 10^2$	0	0	0.04	0.04	0	0
$N = 10^3$	0.0595238	0.0416667	0.0476190	0.0297619	0.0178571	0.0178571
$N = 10^4$	0.0659072	0.0520749	0.0447518	0.0349878	0.0309194	0.0292921
$N = 10^5$	0.0667223	0.0572352	0.0462886	0.0373228	0.0344037	0.0281485
$N = 10^6$	0.0659125	0.0582563	0.0476063	0.0370965	0.0340136	0.0283956
$N = 10^7$	0.0663578	0.0584746	0.0474827	0.0370219	0.0343962	0.0285775
$\dots$			$\dots$			
$N \to \infty$	0.0664063	0.0586420	0.0475207	0.0369898	0.0344444	0.0285494

表 14. $p-1$ の素因数色彩の期待値 ($P_i = 37$ まで)

p	2	3	5	7	11	13
$N=10^1$	1	0.25	0	0	0	0
$N=10^2$	1	0.3255814	0.1162791	0.0697674	0.0697674	0.0465116
$N=10^3$	1	0.3734568	0.1512346	0.0956790	0.0555556	0.0432099
$N=10^4$	1	0.3811696	0.1576110	0.0974699	0.0568229	0.0443799
$N=10^5$	1	0.3751763	0.1560361	0.0964321	0.0540145	0.0449773
$N=10^6$	1	0.3750223	0.1564884	0.0971347	0.0549907	0.0452440
$N=10^7$	1	0.3749478	0.1561633	0.0971979	0.0549703	0.0451344
$\cdots$			$\cdots$			
$N\to\infty$	1	0.375	0.15625	0.0972222	0.055	0.0451389

p	17	19	23	29	31	37
$N=10^1$	0	0	0	0	0	0
$N=10^2$	0	0	0.0232558	0.0232558	0	0
$N=10^3$	0.0308642	0.0216049	0.0246914	0.0154321	0.0092593	0.0092593
$N=10^4$	0.0335960	0.0265450	0.0228121	0.0178349	0.0157611	0.0149316
$N=10^5$	0.0334326	0.0286789	0.0231939	0.0187014	0.0172387	0.0141044
$N=10^6$	0.0330033	0.0291697	0.0238372	0.0185747	0.0170311	0.0142181
$N=10^7$	0.0331926	0.0292494	0.0237512	0.0185186	0.0172052	0.0142947
$\cdots$			$\cdots$			
$N\to\infty$	0.0332031	0.0293210	0.0237603	0.0184949	0.0172222	0.0142747

さて、この議論は、素数に 0 でない任意の整数を加えた数の集合に対しても同様に適用できるので (ただし、0 は任意の整数の倍数であり、0 の付値は ∞ と定義されるので、$p=-m$ のときの $p+m=0$ は例外として除いて考えます)、m を 0 でない任意の整数として、素数に m を加えた数 (「**素数の $\boldsymbol{m}$ 平行移動**」 と呼ぶことにします) から 0 を除いた集合の素因子指数列は (10)、素因数色彩は (11) に一致します。つまり、$m(\in\mathbb{Z})$ を固定して、以下が成り立ちます。

$$\mathrm{pfes}(\{p+m \mid p\in\mathbb{P}, p+m\neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{(P_n-1)^2}\right)_i = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{7}{36}, \cdots\right) \tag{12}$$

$$\mathrm{pfc}(\{p+m \mid p\in\mathbb{P}, p+m\neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{2\,(P_n-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right) \tag{13}$$

6.7 自然数のオイラー関数

N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、そのオイラー関数 $\varphi(n)$ の素因子指数列を考えてみます。n が

$$n = {P_1}^{e_1} \cdot {P_2}^{e_2} \ldots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、

$$\varphi(n) = {P_1}^{e_1-1}(P_1-1){P_2}^{e_2-1}(P_2-1)\ldots{P_m}^{e_m-1}(P_m-1)$$

$$\therefore\ \mathrm{ord}_p\ \varphi(n) = \max(\mathrm{ord}_p n - 1,\ 0) + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_p(P_i - 1)$$

したがって、$\mathrm{ord}_p\ \varphi(n)$ の期待値は以下のようになります。

$$E[\mathrm{ord}_p\,\varphi(n)] = \sum_{j=2}^{[\log_p N]} (j-1)\ Pr[\,\mathrm{ord}_p\,n = j\,] + \sum_{i=1}^{\pi(N)} \mathrm{ord}_p\,(P_i-1)\,\mathrm{Pr}[P_i \mid n]$$

N を限りなく大きくしたときの各指標素数 p に対する素因子指数列の期待値の極限は、

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\,\varphi(n)\,] &= \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{p^j} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ord}_p(P_i-1)}{P_i} \\ &= \frac{1}{p\ (p-1)} + \sum_{p|(P_i-1)}\frac{1}{P_i} + \sum_{p^2|(P_i-1)}\frac{1}{P_i} + \cdots \qquad (14)\end{aligned}$$

となります。(14) の右辺の第 2 項以降の和は、初項が 1、公差が p のべきである等差数列上のすべての素数の逆数の和であり、ディリクレの算術級数定理により、発散します。したがって、自然数のオイラー関数の素因子指数列は、すべての指標素数において発散します。

次に、自然数のオイラー関数の素因数色彩について考察します。(14) において、各指標素数について逆数の和を対象となる素数が重複も含めて一定の比率

$$\frac{1}{P_i-1} + \frac{1}{P_1\,(P_i-1)} + \frac{1}{P_1^2\,(P_i-1)} + \cdots = \frac{P_i}{(P_i-1)^2}$$

で採られていることから、指標素数ごとの素因子指数列の期待値の比は収束すると思われます。その比率から、採られる素数に偏りがなければ、最終的には (11) に近づくと推測されますが、N が比較的小さい値では小さい値での P_i の採り方の影響が強いので、(11) から少しずれた値となると思われます。たとえば、N が比較的小さい値では、指標素数がソフィー・ジェルマン素数 ($2\,p+1$ もまた素数であるような素数 p) のところで高い値になるはずです。また、たとえば $p = 31$ では $10\,p + 1 = 311$ で初めて素数が現れるため、N が比較的小さい間は低い値となります。

表 15 に $\varphi(n)$ の素因子指数列の期待値、表 16.に $\varphi(n)$ 素因数色彩の期待値を、それぞれ $P_i = 37$ まで、$N = 10^1$から $N = 10^7$ までと $N = \infty$ とした極限を計算した値を記します。

表 15. $\varphi(n)$ の素因子指数列の期待値 ($P_i = 37$ まで)

p	2(*)	3(*)	5(*)	7	11(*)	13
$N = 10^1$	1.1	0.2	0	0	0	0
$N = 10^2$	2.29	0.61	0.20	0.08	0.06	0.02
$N = 10^3$	3.106	0.934	0.335	0.157	0.101	0.061
$N = 10^4$	3.7118	1.1575	0.4313	0.2125	0.1330	0.0892
$N = 10^5$	4.17836	1.33171	0.50398	0.25766	0.15835	0.11024
$N = 10^6$	4.557031	1.473742	0.563253	0.294531	0.179201	0.127428
$N = 10^7$	4.8756605	1.5930985	0.6129400	0.3255010	0.1967406	0.1417750
$\cdots$			$\cdots$			
$N \to \infty$	∞	∞	∞	∞	∞	∞

p	17	19	23(*)	29(*)	31	37
$N = 10^1$	0	0	0	0	0	0
$N = 10^2$	0	0	0.02	0.01	0	0
$N = 10^3$	0.034	0.018	0.038	0.025	0.007	0.011
$N = 10^4$	0.0537	0.0344	0.0528	0.0367	0.0166	0.0204
$N = 10^5$	0.06960	0.04718	0.06344	0.04570	0.02478	0.02691
$N = 10^6$	0.082182	0.058199	0.072493	0.052761	0.031255	0.032297
$N = 10^7$	0.0927720	0.0675154	0.0800532	0.0586618	0.0367249	0.0368754
$\cdots$			$\cdots$			
$N \to \infty$	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(*): ソフィー・ジェルマン素数

表 16. $\varphi(n)$ の素因数色彩の期待値 ($P_i = 37$ まで)

p	2(*)	3(*)	5(*)	7	11(*)	13
$N = 10^1$	1	0.1818182	0	0	0	0
$N = 10^2$	1	0.2663756	0.0873362	0.0349345	0.0262009	0.0087336
$N = 10^3$	1	0.3007083	0.1078558	0.0505473	0.0325177	0.0196394
$N = 10^4$	1	0.3118433	0.1161970	0.0572499	0.0358317	0.0240315
$N = 10^5$	1	0.3187160	0.1206167	0.0616653	0.0378976	0.0263836
$N = 10^6$	1	0.3233996	0.1236009	0.0646322	0.0393241	0.0279629
$N = 10^7$	1	0.3267452	0.1257142	0.0667604	0.0403516	0.0290781
$\cdots$			$\cdots$			
$N \to \infty$	1	0.375	0.15625	0.0972222	0.055	0.0451389

p	17	19	23(*)	29(*)	31	37
$N = 10^1$	0	0	0	0	0	0
$N = 10^2$	0	0	0.0087336	0.0043668	0	0
$N = 10^3$	0.0109466	0.0057952	0.0122344	0.0080489	0.0022537	0.0035415
$N = 10^4$	0.0144674	0.0092677	0.0142249	0.0098874	0.0044722	0.0054960
$N = 10^5$	0.0166573	0.0112915	0.015183	0.0109373	0.0059306	0.0064403
$N = 10^6$	0.0180341	0.0127713	0.0159079	0.0115779	0.0068586	0.0070873
$N = 10^7$	0.0190276	0.0138474	0.0164189	0.0120316	0.0075323	0.0075631
$\cdots$			$\cdots$			
$N \to \infty$	0.0332031	0.0293210	0.0237603	0.0184949	0.0172222	0.0142747

(*): ソフィー・ジェルマン素数

6.8 素数全体の集合 $\mathbb{P}$

N 以下の素数 p を無作為に採ったときの各指標素数の指数の期待値から、素因子指数列と素因数色彩を求めると、

$$\mathrm{pfes}(\{p \mid p \in \mathbb{P}, p \leq N\}) = \Big(\overbrace{\frac{1}{\pi(N)}, \cdots, \frac{1}{\pi(N)}}^{\pi(N)}, 0, \cdots\Big) \tag{15}$$

$$\mathrm{pfc}(\{p \mid p \in \mathbb{P}, p \leq N\}) = \big(\overbrace{1, \cdots, 1}^{\pi(N)}, 0, \cdots\big) \tag{16}$$

となります。N を限りなく大きくしたときの極限から、素数全体の集合 $\mathbb{P}$ の素因子指数列と素因数色彩を求めると、

$$\mathrm{pfes}(\mathbb{P}) = (0)_i \tag{17}$$

$$\mathrm{pfc}(\mathbb{P}) = (1)_i \tag{18}$$

となります。

6.9　素数べきの集合

N 以下の素数べき p^r (p は素数、r は自然数) を無作為に採ったとき、各指標素数 P_i の指数の期待値は、

$$
\begin{aligned}
E[\mathrm{ord}_{P_i}\ p^r] &= \frac{T_{[\log_{P_i} N]}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\pi(N)} [\log_{P_j} N]} = \frac{[\log_{P_i} N]([\log_{P_i} N]+1)}{2\displaystyle\sum_{j=1}^{\pi(N)} [\log_{P_j} N]} \\
&< \frac{[\log_{P_i} N]([\log_{P_i} N]+1)}{2\ \pi(N)} \\
\therefore\ \lim_{N\to\infty} E[\mathrm{ord}_{P_i}\ p^r] &< \frac{[\log_{P_i} N]([\log_{P_i} N]+1)}{\dfrac{2\ N}{\ln N}} \\
&= \frac{[\log_{P_i} N]([\log_{P_i} N]+1)\ln N}{2\ N} = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となります。ここで、T_nは n 番目の三角数を表します。したがって、素数べきの集合の素因子指数列は、

$$
\mathrm{pfes}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = (0)_i \tag{20}
$$

となります。素因数色彩は、(19) より、

$$
\mathrm{pfc}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = \left(\frac{1}{(\log P_i)^2}\right)_i \tag{21}
$$

となります。

6.10　異なる素因数の個数についての考察

前節で述べた素数べきの集合は、異なる素因数の個数 (distinct prime factors) が 1 個である自然数の集合 ($\{n \mid n \in \mathbb{N},\ \omega(n) = 1\}$($\omega(n)$ は n の異なる素因数の個数)) と言い換えることができます。自然数全体の集合の素因子指数列は

$$
\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right)
$$

となるので、自然数全体を異なる素因数の個数で分類し、異なる素因数を k 個もつ自然数の集合を $\mathbb{N}_k$ で表わすことにすれば、各 $\mathbb{N}_k$ の素因子指数列の項ごとの合計が自然数全体の集合の素因子指数列になるはずです。それらがどのように分布するのか、今後検討したいと思います。

6.11 自然数の根基

N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、その **根基** $\mathrm{rad}(n)$ (異なる素因数の積) の素因子指数列を考えてみます。n が

$$n = {P_1}^{e_1} \cdot {P_2}^{e_2} \ldots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、

$$\mathrm{rad}(n) = P_1 \cdot P_2 \ldots P_m$$
$$\therefore\ \mathrm{ord}_p\ \mathrm{rad}(n) = \begin{cases} 1\ (p \mid n\ \text{のとき}) \\ 0\ (p \nmid n\ \text{のとき}) \end{cases}$$

したがって、$\mathrm{ord}_p\ \mathrm{rad}(n)$ の期待値は以下のようになります。

$$E[\mathrm{ord}_p\ \mathrm{rad}(n)] = \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$$

N を限りなく大きくしたときの各指標素数 p に対する素因子指数列の期待値の極限は、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\ \mathrm{rad}(n)\,] = \frac{1}{p} \tag{22}$$

となります。したがって、自然数の根基の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{1}{P_i}\right)_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots\right) \tag{23}$$
$$\mathrm{pfc}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{2}{P_i}\right)_i = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \cdots\right) \tag{24}$$

6.12 二項係数

二項係数 (binomial coefficient) の素因数はどのような特徴をもっているでしょうか。n を固定して考えるとき、

$$\binom{n}{k} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ \cdots\ (n-(k-1))}{k\ (k-1)\ (k-2)\ \cdots\ 1}$$

の式の形から直ちに言えることは、

命題 4. $\binom{n}{k}$ $(0 \le k \le n)$ の素因数は、すべて n 以下の素数で構成される。

命題 5. 素数 p が $\dfrac{n+1}{2} < p \le n$ を満たすとき、p は $\binom{n}{k}$ $(0 \le k \le n)$ のいずれかの素因数として必ず現れ、その回数は $2\,p - n - 1$ 回である。

ということです。つまり、$\dfrac{n+1}{2} < p \leq n$ の範囲の素数は、大きいほどその段の素因数として現れる回数が多いことになります。これは二項係数の素因数の特徴の一つと言えるでしょう。

パスカルの三角形およびその各値の素因数分解を、64ページに載せました。上記の特徴は、特に最下段の $n = 17$ の場合を見るとよく見て取れるでしょう。

$p \leq \dfrac{n+1}{2}$ の範囲の素数については、もう少し複雑な議論が必要になります。以下、一般の p について議論します。

自然数 n を固定し、ある素数 p が $\dbinom{n}{k}$ $(0 \leq k \leq n)$ の素因数として含まれる場合の指数の合計を $PavBin(p,n) = \mathrm{ord}_p \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ と定義します。

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k!)^2} = \prod_{k=0}^{n} k^{2\,k-n-1}$$

$$\therefore\ PavBin(p,n) = \mathrm{ord}_p \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (2\,k-n-1)\mathrm{ord}_p k \tag{25}$$

式 (25) の値は、k が 1 から n の間で $\mathrm{ord}_p k$ の値が対称に分布している場合に最小値 0 となり (負の値になることはありません)、対称からのずれが大きくなるに従って式の値も大きくなります。

例として、$p = 2$ とし、$n = 7$ および $n = 8$ の場合を示します。2 段目の $\mathrm{ord}_2 k$ は、k を素因数分解したときの 2 の指数、3 段目の $\mathrm{ord}_2(n+1-k)$ は、2 段目を左右にひっくり返したもの、4 段目の $\mathrm{ord}_2 \dbinom{n}{k}$ は、その上の列までの 3 段目の累計から 2 段目の累計を引くことにより計算できます。$n = 7$ の場合は 2 段目が左右対称のため、すべて 0 となっていますが、$n = 8$ の場合は左右非対称のため、多くが正の値となっています。

表 17: 二項係数における素因数 2 の指数

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{ord}_2 k$	0	1	0	2	0	1	0
$\mathrm{ord}_2(n+1-k)$	0	1	0	2	0	1	0
$\mathrm{ord}_2 \binom{7}{k}$	0	0	0	0	0	0	0
$\binom{7}{k}$	7	21	35	35	21	7	1

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{ord}_2 k$	0	1	0	2	0	1	0	3
$\mathrm{ord}_2(n+1-k)$	3	0	1	0	2	0	1	0
$\mathrm{ord}_2\binom{8}{k}$	3	2	3	1	3	2	3	0
$\binom{8}{k}$	8	28	56	70	56	28	8	1

さて、二項係数における各素因数の指数の動きを詳しく見るために、$n \leq 33$、$p = 2$、3、5、7 に対する $PavBin(p, n)$ とその累計を表 18 に示します。

$\mathrm{ord}(p)$ は、その行の n における $PavBin(p, n)$ の値を示し、右側の列の $\mathrm{sum}(p)$ は、その値のその行までの累計を示します。「累計項数」は、$n = 0$ からその行までの二項係数の項数の累計を示します。$\mathrm{sum}(p)$ の値をその行の累計項数でわることにより、その行までの二項係数における p 進付値の期待値を求めることができます。

表 18: 二項係数における素因数の指数の総数

n	ord(2)	ord(3)	ord(5)	ord(7)	累計項数	sum(2)	sum(3)	sum(5)	sum(7)
1	0	0	0	0	3	0	0	0	0
2	1	0	0	0	6	1	0	0	0
3	0	2	0	0	10	1	2	0	0
4	5	1	0	0	15	6	3	0	0
5	2	0	4	0	21	8	3	4	0
6	4	4	3	0	28	12	7	7	0
7	0	2	2	6	36	12	9	9	6
8	17	0	1	5	45	29	9	10	11
9	10	14	0	4	55	39	23	10	15
10	12	10	8	3	66	51	33	18	18
11	4	6	6	2	78	55	39	24	20
12	18	13	4	1	91	73	52	28	21
13	8	8	2	0	105	81	60	30	21
14	11	3	0	12	120	92	63	30	33
15	0	12	12	10	136	92	75	42	43
16	49	6	9	8	153	141	81	51	51
17	34	0	6	6	171	175	81	57	57
18	36	28	3	4	190	211	109	60	61
19	20	20	0	2	210	231	129	60	63
20	42	12	16	0	231	273	141	76	63
21	24	24	12	18	253	297	165	88	81
22	27	15	8	15	276	324	180	96	96
23	8	6	4	12	300	332	186	100	108
24	58	20	0	9	325	390	206	100	117
25	36	10	44	6	351	426	216	144	123
26	39	0	38	3	378	465	216	182	126
27	16	68	32	0	406	481	284	214	126
28	47	55	26	24	435	528	339	240	150
29	22	42	20	20	465	550	381	260	170
30	26	58	43	16	496	576	439	303	186
31	0	44	36	12	528	576	483	339	198
32	129	30	29	8	561	705	513	368	206
33	98	48	22	4	595	803	561	390	210

ord(2)、ord(3)、ord(5)、ord(7) の値の変化を観察することにより、これらの値が n の p 進数表記のパターンによって計算できることがわかります。

さて、p^r よりも小さいすべての n についての $PavBin(p,n)$ の合計を

$$SumPavBin(p,r) = \sum_{n=0}^{p^r-1} PavBin(p,n)$$

と定義します。この値は次のようにして計算できます。

まず、具体例で説明します。$p=5$ とし、$n=12$ の段を考えます。31ページに示した表と同様の表を考えますが、ここでは p の指数ではなく、p でわりきれるかどうかだけを考えます。つまり p^2 以上の指数を無視します。

表 19: 二項係数が 5 でわりきれるかどうか

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
if $5 \mid k$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
if $5 \mid (n+1-k)$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
if $5 \mid \binom{12}{k}$	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
$\binom{12}{k}$	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

この表により、$\binom{12}{k}$には 5 の倍数が 4 個あることがわかりますが、その 4 は、

$$(5-1-(12\%5)) \times [12/5] = (p-1-(n\%p)) \times [n/p] \tag{26}$$

という式で計算できることがわかります。ここで、n を p でわった商を $[n/p]$、余りを $n\%p$ で表しています。

ここで、(26) 式の右辺を $PavBinPow(n,p,e)$ とおき、自然数 n、素数 p、指数 e の関数と考えます。n を 0 から 4、5 から 9、$\cdots$、と 5 個ずつまとめた和を考えると、

$$\sum_{n=0}^{4} PavBinPow(n,5,1) = 0$$

$$\sum_{n=5}^{9} PavBinPow(n,5,1) = \left(5\times(5-1) - \sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times 1 = \left(\sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times 1$$

$$\sum_{n=10}^{14} PavBinPow(n,5,1) = \left(5\times(5-1) - \sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times 2 = \left(\sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times 2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{n=5^r-5}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,1) = \left(5\times(5-1) - \sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times (5^{r-1}-1) = \left(\sum_{i=0}^{5-1} i\right) \times (5^{r-1}-1)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,1) = \left(\sum_{i=0}^{5-1} i\right) \left(\sum_{i=0}^{5^{r-1}-1} i\right)$$

となります。次に、p^2 でわりきれるかどうかについての表を同様に考え、同様の計算を行うと、

$$\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,2) = \Big(\sum_{i=0}^{5^2-1} i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5^{r-2}-1} i\Big)$$

が導かれます。同様にして、

$$\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,3) = \Big(\sum_{i=0}^{5^3-1} i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5^{r-3}-1} i\Big)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,r-1) = \Big(\sum_{i=0}^{5^{r-1}-1} i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5-1} i\Big)$$

となります。ここで $SumPavBin(5,r)$ を考えます。指数の和を計算する際に、p^{e+1}の倍数はすでに p^1 から p^e の倍数として (e 回) 数えていますから、増える指数は 1 だけであることに注意すると、$\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,1)$ から $\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,r-1)$ までをそのまま足せばよいことがわかります。

$$\begin{aligned} SumPavBin(5,r) &= \sum_{e=1}^{r-1}\sum_{n=0}^{5^r-1} PavBinPow(n,5,e) \\ &= \sum_{e=1}^{r-1}\Big(\big(\sum_{i=1}^{5^e-1} i\big)\big(\sum_{i=1}^{5^{r-e}-1} i\big)\Big) \end{aligned}$$

以上の議論は、5 を一般の素数 p に置き換えることができるから、一般に、

$$SumPavBin(p,r) = \sum_{e=1}^{r-1}\Big(\big(\sum_{i=1}^{p^e-1} i\big)\big(\sum_{i=1}^{p^{r-e}-1} i\big)\Big)$$

が成り立ちます。右辺を和の公式を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} SumPavBin(p,r) &= \sum_{e=1}^{r-1} \frac{p^e\ (p^e-1)}{2}\frac{p^{r-e}\ (p^{r-e}-1)}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{e=1}^{r-1}(p^{2\,r}-p^{2\,r-e}-p^{r+e}+p^r) \\ &= \frac{r-1}{4}p^r\ (p^r+1) - \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{r-1} p^{r+e} \\ &= \frac{r-1}{4}p^r\ (p^r+1) - \frac{p^{r+1}\ (p^{r-1}-1)}{2\ (p-1)} \\ &= \frac{p^r\ (r\ p^{r+1}-r\ p^r+r\ p-r-p^{r+1}-p^r+p+1)}{4\ (p-1)} \end{aligned} \tag{27}$$

ここで、r を限りなく大きくしたときの極限を考えると、(27) 式の右辺のカッコ内の第 3 項以降が無視できるから、

$$
\begin{aligned}
SumPavBin(p,r) &\fallingdotseq \frac{p^r\ (r\ p^{r+1} - r\ p^r)}{4\ (p-1)} = \frac{r\ p^{2\,r}\ (p-1)}{4\ (p-1)} = \frac{r\ p^{2\,r}}{4} \\
\lim_{r\to\infty} \frac{SumPavBin(p,r)}{\frac{r\ p^{2\,r}}{4}} &= 1
\end{aligned} \tag{28}
$$

なお、p^r よりも小さいすべての n についての二項係数の項の総数は $\dfrac{p^r\ (p^r+1)}{2}$ だから、(28) より、それらの二項係数の素因数 p の指数の期待値は、r が限りなく大きくなるとき、$\dfrac{r}{2}$ に近づくことがわかります。

以上より、最初の N 個の二項係数から要素 n を無作為に採るものとし、N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\frac{r}{2}} = 1
$$

$$
\therefore \lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\frac{\log N}{2\ \log p}} = 1
$$

となります。したがって、二項係数の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$
\mathrm{pfes}(\text{二項係数}) = \left(\frac{\log N}{2\ \log P_i}\right)_i = \frac{\log N}{2}\left(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\right) \tag{29}
$$

$$
\mathrm{pfc}(\text{二項係数}) = \left(\frac{1}{\log P_i}\right)_i = \left(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\right) \tag{30}
$$

(29) の右辺の最初の係数 $\dfrac{\log N}{2}$ は、最初の N 個の二項係数の素因子の指数の期待値が N とともに大きくなるスピードを表しています。また、(30) より、二項係数の素因数色彩は高度合成数の素因数色彩 (および極限色彩) と全く同じであることもわかります。これはパスカルの三角形の一部を観察してもなかなか予想できないことであり、驚くべき結果といえます。

なお、ここで考えたのは二項係数をそのまま並べた数列[6] に含まれる素因数の分布を調べたものであり、二項係数の中に同じ数が登場しても重複して数えているので、二項係数のとりうる値の集合 (自然数全体の集合) ではないことを注意しておきます。

[6] 二項係数をそのまま並べた数列を $\{BinCo_m\}_m = \{1,1,1,1,2,1,1,3,3,1,\cdots\}$ とし、n 番目の三角数を $T_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ とおくと、$BinCo_m = \dbinom{n}{k}$ のとき、以下の関係があります。

$$
m = T_n + k + 1, \quad T_n < m \le T_{n+1}, \quad 0 \le k \le n
$$

素因数色彩の理論 (素因数分布論) 第 4 部

2019 年 3 月 28 日　浜田忠久

6.13　自然数の約数の数

N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、その約数の数 $d(n)$ の素因子指数列を考えてみます。n が

$$n = {P_1}^{e_1} \cdot {P_2}^{e_2} \ldots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、(n ではなく $d(n)$ の) 素因子 p の指数の期待値は以下のようになります。なお、下の式において、和を計算する際の添字 i、j、k の最大値 I、J、K はそれぞれ

$$\begin{aligned} I &= \pi(N) \\ J &= [\log_p((\log_{P_i} N) + 1)] \\ K &= [(\log_{P_i} N) + 1] \end{aligned}$$

とします。

$$\begin{aligned} E[\,\mathrm{ord}_p\, d(n)\,] &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J}\ j\ Pr[\,\mathrm{ord}_p\,(e_i + 1) = j\,] \\ &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} Pr[\,p^j \mid (e_i + 1)\,] \\ &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K}\ (\mathrm{ord}_p\, k)\ Pr[\,e_i = k - 1\,] \end{aligned}$$

N を限りなく大きくしたときの各素数 p に対する p 進付値の期待値の極限は、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\, d(n)\,] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\ (\mathrm{ord}_p\, k)\ (\frac{1}{P_i^{k-1}} - \frac{1}{P_i^{k}}) \tag{31}$$

となります。さて、$\zeta_{\mathrm{p}}(s)$ は素数ゼータ関数で、

$$\zeta_{\mathrm{p}}(s) = \sum_{p} \frac{1}{p^s}$$

と定義されます。ここで、p はすべての素数をわたります。$\zeta_{\mathrm{p}}(s)$ は $s = 1$ で発散し、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で収束します。

$$
\begin{array}{lll}
\zeta_{\mathrm{p}}(1) = \infty & \zeta_{\mathrm{p}}(2) = 0.4522474200\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(3) = 0.1747626392\ldots \\
\zeta_{\mathrm{p}}(4) = 0.0769931397\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(5) = 0.0357550174\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(6) = 0.0170700868\ldots \\
\zeta_{\mathrm{p}}(7) = 0.0082838328\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(8) = 0.0040614053\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(9) = 0.0020044675\ldots \\
\zeta_{\mathrm{p}}(10) = 0.0009936035\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(11) = 0.0004939472\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(12) = 0.0002460264\ldots \\
\zeta_{\mathrm{p}}(13) = 0.0001226983\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(14) = 0.0000612443\ldots & \zeta_{\mathrm{p}}(15) = 0.0000305873\ldots
\end{array}
$$

となります。$\zeta_{\mathrm{p}}(s)$ を使うと、式 (31) は以下のように表わせます。

$$
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\, d(n)\,] = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{ord}_p\, k)\ (\zeta_{\mathrm{p}}(k-1) - \zeta_{\mathrm{p}}(k)) \tag{32}
$$

各素因子 p の指数の期待値の極限は、式 (32) を用いて以下のように計算されます。

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\, d(n)\,] &= (\zeta_{\mathrm{p}}(1) - \zeta_{\mathrm{p}}(2)) + 2\ (\zeta_{\mathrm{p}}(3) - \zeta_{\mathrm{p}}(4)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(5) - \zeta_{\mathrm{p}}(6)) \\
&\quad + 3\ (\zeta_{\mathrm{p}}(7) - \zeta_{\mathrm{p}}(8)) + \ldots \\
&= \infty \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_3\, d(n)\,] &= (\zeta_{\mathrm{p}}(2) - \zeta_{\mathrm{p}}(3)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(5) - \zeta_{\mathrm{p}}(6)) + 2\ (\zeta_{\mathrm{p}}(8) - \zeta_{\mathrm{p}}(9)) \\
&\quad + (\zeta_{\mathrm{p}}(11) - \zeta_{\mathrm{p}}(12)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(14) - \zeta_{\mathrm{p}}(15)) + 2\ (\zeta_{\mathrm{p}}(17) - \zeta_{\mathrm{p}}(18)) + \ldots \\
&\fallingdotseq 0.30057 \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_5\, d(n)\,] &= (\zeta_{\mathrm{p}}(4) - \zeta_{\mathrm{p}}(5)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(9) - \zeta_{\mathrm{p}}(10)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(14) - \zeta_{\mathrm{p}}(15)) \\
&\quad + (\zeta_{\mathrm{p}}(19) - \zeta_{\mathrm{p}}(20)) + 2\ (\zeta_{\mathrm{p}}(24) - \zeta_{\mathrm{p}}(25)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(29) - \zeta_{\mathrm{p}}(30)) + \ldots \\
&\fallingdotseq 0.04228 \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_7\, d(n)\,] &= (\zeta_{\mathrm{p}}(6) - \zeta_{\mathrm{p}}(7)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(13) - \zeta_{\mathrm{p}}(14)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(20) - \zeta_{\mathrm{p}}(21)) + \ldots \\
&\fallingdotseq 0.00885 \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_{11}\, d(n)\,] &= (\zeta_{\mathrm{p}}(10) - \zeta_{\mathrm{p}}(11)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(21) - \zeta_{\mathrm{p}}(22)) + (\zeta_{\mathrm{p}}(32) - \zeta_{\mathrm{p}}(33)) + \ldots \\
&\fallingdotseq 0.00050
\end{aligned}
$$

このように、$d(n)$ の素因子指数列は、N を限りなく大きくしていくとき、指標素数 2 において発散し、3 以上のすべての指標素数において収束するという著しい結果が得られます。

ただ、$p = 2$ において発散するといっても、そのスピードは極めて緩やかです。N が大きくなるにつれて p 進付値の期待値がどのように変化するかを計算した結果を表 11 に示します。

表 11. $d(n)$ の p 進付値の期待値 ($p=11$ まで)

p	2	3	5	7	11
$N=10^1$	1	0.2	0	0	0
$N=10^2$	1.47	0.29	0.04	0.01	0
$N=10^3$	1.91	0.293	0.041	0.009	0
$N=10^4$	2.2086	0.298	0.0422	0.0088	0.0005
$N=10^5$	2.44089	0.2999	0.04227	0.00884	0.0005
$N=10^6$	2.63015	0.30039	0.04228	0.00885	0.00050
$N=10^7$	2.78936	0.30052	0.04228	0.00885	0.00050
$N=10^8$	2.92667	0.30056	0.04228	0.00885	0.00050
$N=10^9$	3.04735	0.30057	0.04228	0.00885	0.00050
$\cdots$			$\cdots$		
$N\to\infty$	∞	0.30057	0.04228	0.00885	0.00050

表 11 において、p 進付値の期待値の変化を p の値で比較すると、p が大きいほど p 進付値の期待値の増え方が緩やかになっていることが見て取れます。

6.14 自然数の約数の和

N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、その約数の和$\sigma(n)$ の素因子指数列を考えてみます。n が

$$n = {P_1}^{e_1} * {P_2}^{e_2} * \dots {P_m}^{e_m}$$

と素因数分解されるとき、

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{e_i} P_i^j$$

と表せるので、(n ではなく$\sigma(n)$ の) 素因子 p の指数の期待値は以下のようになります。なお、下の式において、和を計算する際の添字 i、j、k の最大値 I、J はそれぞれ

$$I = \pi(N)$$
$$J = [\frac{\log_{P_i} N}{2}]$$

とします。上式において $e_i = \mathrm{ord}_{P_i} n$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} E[\,\mathrm{ord}_p\,\sigma(n)\,] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{\mathrm{ord}_{P_i} n} P_i^k \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{\mathrm{ord}_{P_i} n} P_i^k \end{aligned}$$

ここで、次の命題が成り立ちます。

命題 6. 任意の自然数 n、i、任意の素数 p に対して、以下の式が成り立つ。
$p=2$ のとき、

$$\mathrm{ord}_2 \sum_{k=0}^{\mathrm{ord}_{P_i} n} P_i^k = \begin{cases} \mathrm{ord}_2(1+\mathrm{ord}_{P_i} n)+\mathrm{ord}_2(P_i+1)-1 & (P_i \neq 2 \text{ かつ } 2 \mid 1+\mathrm{ord}_{P_i} n \text{ のとき}) \\ 0 & (P_i = 2 \text{ または } 2 \nmid 1+\mathrm{ord}_{P_i} n \text{ のとき}) \end{cases}$$

$p>2$ のとき、

$$\mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{\mathrm{ord}_{P_i} n} P_i^k = \begin{cases} 1+\mathrm{ord}_p \dfrac{1+\mathrm{ord}_{P_i} n}{\mathrm{O}_p P_i} & (P_i \,\%\, p > 1 \text{ かつ } \mathrm{O}_p P_i \mid 1+\mathrm{ord}_{P_i} n \text{ のとき}) \\ 0 & (P_i \,\%\, p > 1 \text{ かつ } \mathrm{O}_p P_i \nmid 1+\mathrm{ord}_{P_i} n \text{ のとき}) \\ \mathrm{ord}_p(1+\mathrm{ord}_{P_i} n) & (P_i \,\%\, p = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (P_i = p \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、$a \,\%\, b$ は a を b でわった余り、$\mathrm{O}_a b$ は a を法とする b の位数 (互いに素な正の整数 a と b に対して $b^k \equiv 1 \pmod a$ が成り立つ最小の正の整数 k) を表す。□

証明. $r=\mathrm{ord}_{P_i} n$ とおく。$p>2$ の場合から証明する。

$p>2$ の場合) $P_i=p$ のときは明らか。$P_i \,\%\, p = 1$ とすると、$P_i = a \cdot p + 1$ (p, a は互いに素) とおけるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r} P_i^k &= 1+(a\cdot p+1)+\cdots+(a\cdot p+1)^r \\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{k}{0}1+\sum_{k=1}^{r}\binom{k}{1}a\cdot p+\cdots+\sum_{k=r}^{r}\binom{k}{r}(a\cdot p)^r \\ &= (r+1)+\frac{r\ (r+1)}{2}a\cdot p+\cdots+(a\cdot p)^r \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{r} P_i^k = \mathrm{ord}_p\,(r+1) = \mathrm{ord}_p(1+\mathrm{ord}_{P_i} n)$$

次に $P_i \,\%\, p > 1$ とし、$s=\mathrm{O}_p P_i$ とおくと、$P_i^s = a \cdot p + 1$
(p, a は互いに素) とおけるから、

$$\sum_{k=0}^{s-1} P_i^k = \frac{P_i^s-1}{P_i-1} = \frac{a\cdot p}{P_i-1}$$

が成り立つ。P_i-1 と p は互いに素だから、

$$\mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{s-1} P_i^k = 1$$

また、自然数 t が s よりも小さいとき、明らかに、

$$\mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{t-1} P_i^k = 0$$

したがって、$s = \mathrm{O}_p P_i$ は、$\mathrm{ord}_p \displaystyle\sum_{k=0}^{t-1} P_i^k$ が 1 となる最初の自然数 t である。

さて、$\displaystyle\sum_{k=0}^{r} P_i^k$ を s 項ごとにまとめると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} P_i^k =&(1 + P_i + \cdots P_i^{s-1}) + (P_i^s + \cdots P_i^{2\,s-1}) + \cdots + (P_i^{s \cdot [\frac{r+1}{s}]} + \cdots + P_i^r) \\ =&(1 + P_i + P_i^2 + \cdots P_i^{s-1}) + P_i^s(1 + P_i + P_i^2 + \cdots P_i^{s-1}) + \cdots \\ &+ P_i^{s \cdot [\frac{r+1}{s}] - s}(1 + P_i + P_i^2 + \cdots + P_i^{r+s-s\cdot[\frac{r+1}{s}]})\end{aligned} \tag{33}$$

式 (33) の右辺の最後のカッコを除くカッコはすべて p 進付値が 1 であり、最後のカッコは $r+1$ が s の倍数以外のときに p 進付値が 0 となるから、そのとき右辺全体の p 進付値も 0 となる。$r+1$ が s の倍数のときは、$r+1 = s\ t$ とおいて、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} P_i^k =&(1 + P_i + P_i^2 + \cdots P_i^{s-1})\ (1 + P_i^s + \cdots P_i^{r+1-s}) \\ =&\frac{a \cdot p}{P_i - 1}\ (1 + (a\cdot p + 1) + \cdots + (a \cdot p + 1)^{t-1}) \\ =&\frac{a \cdot p}{P_i - 1}\ (\sum_{k=0}^{t-1}\binom{k}{0}1 + \sum_{k=1}^{t-1}\binom{k}{1}a\cdot p + \cdots + \sum_{k=t-1}^{t-1}\binom{k}{t-1}(a\cdot p)^{t-1}) \\ =&\frac{a \cdot p}{P_i - 1}\ \Big(t + \frac{t\ (t-1)}{2}a\cdot p + \cdots + (a\cdot p)^{t-1}\Big)\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{r} P_i^k = 1 + \mathrm{ord}_p\, t = 1 + \mathrm{ord}_p \frac{1 + \mathrm{ord}_{P_i} n}{\mathrm{O}_p P_i}$$

$p = 2$ の場合) $P_i = 2$ のときは明らか。$P_i > 2$ として、$m = \mathrm{ord}_2(P_i + 1)$ とおくと、$P_i = a \cdot 2^m - 1$ (p, a は互いに素) とおける。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} P_i^k =&\sum_{k=0}^{r}(a\cdot 2^m - 1)^k \\ =&1 + (a\cdot 2^m - 1) + (a \cdot 2^m - 1)^2 + \cdots (a\cdot 2^m - 1)^r \\ =&\sum_{k=0}^{r}\binom{k}{0}(-1)^k + \sum_{k=1}^{r}\binom{k}{1}(-1)^{k-1}(a\cdot 2^m) \\ &+ \sum_{k=2}^{r}\binom{k}{2}(-1)^{k-2}(a\cdot 2^m)^2 + \cdots + \sum_{k=r}^{r}\binom{k}{r}(-1)^{k-r}(a\cdot 2^m)^r\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k + \sum_{k=1}^{r} \binom{k}{1} (-1)^{k-1} (a \cdot 2^m) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{r} \binom{k}{2} (-1)^{k-2} (a \cdot 2^m)^2 + \cdots + (a \cdot 2^m)^r
\end{aligned}
$$

ここで、r が偶数の場合と奇数の場合に分ける。r が偶数の場合、$r = 2t$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r} P_i^k &= 1 - t\,(a \cdot 2^m) + (t+1)^2\,(a \cdot 2^m)^2 + \cdots + (a \cdot 2^m)^{2t} \\
\therefore \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{r} P_i^k &= 0
\end{aligned}
$$

r が奇数の場合、$r = 2t - 1$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r} P_i^k &= t\,(a \cdot 2^m) - t\,(t+1)\,(a \cdot 2^m)^2 + \cdots + (a \cdot 2^m)^{2t-1} \\
&= \frac{r+1}{2}\,(a \cdot 2^m) - \frac{r+1}{2}\,(\frac{r+3}{2})\,(a \cdot 2^m)^2 + \cdots + (a \cdot 2^m)^r \\
\therefore \mathrm{ord}_p \sum_{k=0}^{r} P_i^k &= \mathrm{ord}_2\,(r+1) + m - 1
\end{aligned}
$$

■

命題 6から、$p = 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] &= \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{I} \sum_{j=1}^{J} (\mathrm{ord}_2(j+1) + \mathrm{ord}_2(P_i+1) - 1)\big([\frac{N}{P_i^{2j-1}}] - [\frac{N}{P_i^{2j}}]\big) \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] &= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{ord}_2(j+1))\ \big(\frac{1}{P_i^{2j-1}} - \frac{1}{P_i^{2j}}\big) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{\infty} (\mathrm{ord}_2(P_i+1) - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \big(\frac{1}{P_i^{2j-1}} - \frac{1}{P_i^{2j}}\big) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

(34) の右辺の第 1 項の内側の総和は、

(初項が$\dfrac{1}{P_i}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^2}$の等比級数) $-$ (初項が$\dfrac{1}{P_i^2}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^2}$の等比級数)
$+$ (初項が$\dfrac{1}{P_i^3}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^4}$の等比級数) $-$ (初項が$\dfrac{1}{P_i^4}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^4}$の等比級数)
$+$ (初項が$\dfrac{1}{P_i^7}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^8}$の等比級数) $-$ (初項が$\dfrac{1}{P_i^8}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^8}$の等比級数)
$+ \ldots$
の無限和に書き直すことができ、同様に第 2 項の内側の総和は、

(初項が$\dfrac{1}{P_i}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^2}$の等比級数) − (初項が$\dfrac{1}{P_i^2}$、公比が$\dfrac{1}{P_i^2}$の等比級数)
に書き直すことができるから、

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] = \sum_{i=2}^{\infty} \Big(& \frac{1}{P_i}\frac{P_i^2}{P_i^2-1} - \frac{1}{P_i^2}\frac{P_i^2}{P_i^2-1} \\
& + \frac{1}{P_i^3}\frac{P_i^4}{P_i^4-1} - \frac{1}{P_i^4}\frac{P_i^4}{P_i^4-1} \\
& + \frac{1}{P_i^7}\frac{P_i^8}{P_i^8-1} - \frac{1}{P_i^8}\frac{P_i^8}{P_i^8-1} \\
& + \cdots \Big) \\
+ \sum_{i=2}^{\infty} & (\mathrm{ord}_2(P_i+1)-1)\ \Big(\frac{1}{P_i}\frac{P_i^2}{P_i^2-1} - \frac{1}{P_i^2}\frac{P_i^2}{P_i^2-1}\Big) \\
= \sum_{i=2}^{\infty} & \big((P_i-1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{P_i^{2\,j}-1} + \frac{\mathrm{ord}_2(P_i+1)-1}{P_i+1}\big)
\end{aligned} \tag{35}$$

となります。(35) 式の内側の総和は Lambert 級数であり、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n \quad (|x|<1, d(n)\text{ は }n\text{ の約数の数}) \tag{36}$$

の公式を使うと、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] = \sum_{i=2}^{\infty}\big((P_i-1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d(j)}{P_i^{2\,j}} + \frac{\mathrm{ord}_2(P_i+1)-1}{P_i+1}\big) \tag{37}$$

とも表わせます。

次に、$p>2$ のとき、

$$\begin{aligned}
E[\,\mathrm{ord}_p\,\sigma(n)\,] = & \frac{1}{N}\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p>1}}^{I} \sum_{j=1}^{J} (1+\mathrm{ord}_p\frac{j}{\mathrm{O}_p P_i})\big([\frac{N}{P_i^{j\,\mathrm{O}_p P_i-1}}] - [\frac{N}{P_i^{j\,\mathrm{O}_p P_i}}]\big) \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p=1}}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mathrm{ord}_p j\big([\frac{N}{P_i^{j\,p-1}}] - [\frac{N}{P_i^{j\,p}}]\big) \\
\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\,\sigma(n)\,] = & \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p>1}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1+\mathrm{ord}_p\frac{j}{\mathrm{O}_p P_i})\ \big(\frac{1}{P_i^{j\,\mathrm{O}_p P_i-1}} - \frac{1}{P_i^{j\,\mathrm{O}_p P_i}}\big) \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p=1}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{ord}_p j\ \big(\frac{1}{P_i^{j\,p-1}} - \frac{1}{P_i^{j\,p}}\big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ P_i \,\%\, p>1}}^{\infty} (P_i - 1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{P_i^{p^j \, \mathrm{O}_p P_i} - 1} + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i \,\%\, p=1}}^{\infty} (P_i - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_i^{p^j} - 1} \tag{38}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ P_i \,\%\, p>1}}^{\infty} (P_i - 1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(j)}{P_i^{p^j \, \mathrm{O}_p P_i}} + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i \,\%\, p=1}}^{\infty} (P_i - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(j)}{P_i^{p^j}} \tag{39}$$

通常の式変形により (38) 式、さらに Lambert 級数の公式 (36) を用いて (39) 式が得られます。

(35)、(38) より、自然数の約数の和の、指標素数 p における p 進付値は、$p = 2$ のときに発散し、$p > 2$ のときに収束することがわかります。

10^6(百万) 以下の自然数について約数の和の各素因子pの指数の期待値を計算した結果を表 20 に示します。

$p = 2$ の行で 3 と 7 の位数の値に $(\times 2)$ や $(\times 2)$ をつけているのは、(35) 式の無限和の中の第 2 項があるためで、$\mathrm{ord}_2(3+1) = 2$ および $\mathrm{ord}_2(7+1) = 3$ を示します。また、$p = 2$ の行の各項目や $p = 3$ の行で「7 の位数」が「(3)」となっているのは、$7^1 \equiv 1 \pmod 3$ なので 3 を法とする 7 の位数は 1 ですが、 (38) 式にあるように、位数が 1 の場合は無限和の各項の分母の P_i の指数が 1 ではなく p の倍数で計算するため、p として ( ) の中に入れました。

表 20. $\sigma(n)$ の p 進付値の期待値 ($p = 31$ まで)

p	p 進付値	2 の位数	3 の位数	5 の位数	7 の位数	11 の位数
2	4.324325	−	(2)(× 2)	(2)	(2)(× 3)	(2)
3	1.776430	2	−	2	(3)	2
5	0.540818	4	4	−	4	(5)
7	0.478878	3	6	6	−	3
11	0.167498	10	5	5	10	−
13	0.185719	12	3	4	12	12
17	0.086396	8	16	16	16	16
19	0.120357	18	18	9	3	3
23	0.049584	11	11	22	22	22
29	0.036969	28	28	14	7	28
31	0.111774	5	30	3	15	30

全体に、指標素数 p が大きくなるほど p 進付値の値は小さくなる傾向がありますが、興味深いことに、$p = 13$、19、31 において逆転が起こっています。また、$p = 7$ の値は $p = 5$ の値からわずかしか小さくありません。その理由は以下のように説明できます。逆転が起こる指標素数は、比較的小さい素数の位数が小さいので、p 進付値の期待値が大きくなります。特に、3 と 7 と 31 はメルセンヌ素数なので、2 の位数が小さくなります。

7 素因子指数列の逆関数

ある数列が与えられたとき、それをある数の素因子指数列とみなして元の数を求めるという操作を考えてみます。つまり、数列 $(a_n)_n$ に対して $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n}$ を対応させる操作を、「**逆素因子指数列**」(inverse prime factor exponential sequence) と呼び、ipfes($(a_n)_n$) と書くことにします。

$$\mathrm{ipfes}(\ (a_n)_n\ ) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n} \tag{40}$$

(40) の右辺が発散するときは正の無限大に発散するので、ipfes の値も正の無限大とします。たとえば、引数として自然数全体の集合の素因子指数列、$\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\dfrac{1}{P_i - 1}\right)_i$ をとれば、

$$\mathrm{ipfes}(\ \mathrm{pfes}(\mathbb{N})) = \mathrm{ipfes}\Bigl(\ \left(\frac{1}{P_n - 1}\right)_n\ \Bigr) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{P_n - 1}} = +\infty \tag{41}$$

となります。この値が正の無限大に発散することは、(41) の第 3 辺の対数をとって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log P_n}{P_n - 1}$$

が正の無限大に発散することからもわかります。

逆素因子指数列は、拡張実数 (実数に正負の無限大を加えた集合) を項とする数列全体を定義域とし、拡張実数を値域とする写像と考えることができます。数列が与えられるとそれに対応する逆素因子指数列が定まりますが、実数が与えられてもその実数を逆素因子指数列の値とする数列は一意に定まりません。

ある数列と、その素因子指数列の逆素因子指数列の間の関係について、以下の命題が成り立ちます。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはありませんが、元の数列の項として有理数や代数的数を考える場合、その p 進付値が負となる場合があるので、そのことを踏まえた命題とします。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはないので、その逆素因子指数列が収束するときは必ず絶対収束となります。

命題 7. ある数列 $(a_n)_n$ の素因子指数列 $(b_i)_i$ ($= \mathrm{pfes}((a_n)_n)$) の各項の絶対値が 0 でない有限の実数 ($0 < |b_i| < \infty$) で、その逆素因子指数列が絶対収束するとき、その値は元の数列の幾何平均の極限に一致する。すなわち、

$$\mathrm{ipfes}((b_i)_i) = \mathrm{ipfes}(\mathrm{pfes}((a_n)_n)) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)^{\frac{1}{N}}$$

が成り立つ。□

証明. ipfes(pfes($(a_n)_n$)) が絶対収束するという仮定から、以下の式変形において積の順序を入れ替えることができる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{ipfes}(\mathrm{pfes}((a_n)_n)) &= \prod_{i=1}^{\infty} {P_i}^{b_i} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} {P_i}^{\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{\infty} {P_i}^{\frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} {P_i}^{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n} \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{\infty} {P_i}^{\mathrm{ord}_{P_i} a_n} \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n \right)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

■

これまでに見てきた自然数の無限集合の多くは、素因子指数列の逆素因子指数列が無限大となります。一般に、ある数列が正の無限大に発散する、つまり任意の実数 μ に対して自然数 $n_0(\mu)$ が定まって、

$$n > n_0(\mu) \longrightarrow a_n > \mu$$

となるとき、その数列の幾何平均も正の無限大に発散します。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \longrightarrow \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n \right)^{\frac{1}{N}} = +\infty$$

が成り立ちます。しかし、正の無限大に発散する数列であっても、その素因子指数列の逆素因子指数列が有限の値となる場合があります。つまり、自然数の無限集合であっても、その素因子指数列の逆素因子指数列が有限の値となるものがあるということです。典型的な例が素数全体の集合 $\mathbb{P}$ や素数べきの集合で、素因子指数列が $(\ 0\ )_i$ となるので、逆素因子指数列は 1 となります。

さらに、数列の素因子指数列の逆素因子指数列が有限の値をもつための条件を詳しく考えてみます。たとえば (41) の左辺において P_n に 1 より大きい指数をつけることが考えられます。指数が 1 より大きい実数であれば有限の値となりますが、たとえば 2 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\frac{1}{{P_n}^2 - 1} \Big)_n \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^2-1}} \tag{42}$$

となります。(42) の右辺が収束することは、(41) と同様に対数をとればわかります。それでは、逆に (42) の左辺の引数の数列を素因子指数列とする元の数列を構成することはどのようにしてできるでしょうか。たとえば、第 n 項を、n の平方因子の平方根 (つまり $\sqrt{n}$ で n の平方因子を取り出して $\sqrt{n} = a\sqrt{b}$ と変形したときの a) とし、n が平方因子をもたないときは 1 とする数列

$$(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, \ldots)$$

の素因子指数列は (42) の左辺の引数の数列に一致します。この数列自体は発散しますが、その素因子指数列の逆素因子指数列は有限の値となるということです。

表 21 に、(42) において N 以下の素数について逆素因子指数列を計算した結果を、$N = 10^1$ から $N = 10^6$ について示します。

表 21. $\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\dfrac{1}{{P_n}^2 - 1} \Big)_n \Big)$ の値

	$N = 10^1$	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
ipfes の値	1.60958327	1.75079235	1.76644694	1.76802228	1.76818043	1.76819631

また、(41) において P_n の指数を 3 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\frac{1}{{P_n}^3 - 1} \Big)_n \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^3 - 1}} \tag{43}$$

となります。左辺は、第 n 項を、n の立方因子の立方根 (つまり $\sqrt[3]{n}$ で n の立方因子を取り出して $n = a\sqrt[3]{b}$ と変形したときの a) とし、n が立方因子をもたないときは 1 とする数列の素因子指数列に一致します。

表 22 に、(43) において N 以下の素数について逆素因子指数列を計算した結果を、$N = 10^1$ から $N = 10^6$ について示します。

表 22. $\mathrm{ipfes}\Big(\Big(\dfrac{1}{{P_n}^3 - 1} \Big)_n \Big)$ の値

	$N = 10^1$	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
ipfes の値	1.17344572	1.17912391	1.17918342	1.17918400	1.17918401	1.17918401

さて、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$　$\{n\}_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ の素因子指数列 (あるいは、自然数を小さい順に並べた数列 $(n)_n$ の素因子指数列とも言いかえられます) の逆素因子指数列が正の無限大に発散することは前に見ましたが、自然数の並べ替えとなる数列 (つまり $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射) で、逆素因子指数列が有限の値になるものは存在するでしょうか。

実は、数列をうまく定義することにより、その素因子指数列を $(0)_i$、つまりその素因子指数列の逆素因子指数列を 1 にすることができます。

数列 $(a_n)_n$ を、n がある合成数 m の平方のとき $a_n = m$、ある合成数の平方でない n に対しては、a_n に 1 および素数を順次割り当てることにすると、

$$(a_n)_n = (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 4, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 6, 139, 149, \dots)$$

となります。ここで、$a_{16} = 4, a_{36} = 6, a_{64} = 8,$ などとなります。したがって、

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n < \frac{\sqrt{N}}{(P_i - 1)}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} < \frac{1}{\sqrt{N}(P_i - 1)}$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} = 0$$

$$\mathrm{pfes}((a_n)_n) = (0)_i$$

$$\mathrm{ipfes}(\mathrm{pfes}((a_n)_n)) = 1$$

このようにして、自然数の並べ替えとなる数列で、その素因子指数列が $(0)_i$ となるものが存在し、またその構成法の一つを示すことができました。

次に、自然数の並べ替えとなる数列の素因子指数列の項はどこまでの範囲の値を取り得るでしょうか。実は、以下の命題が成り立ちます。

命題 8. 各項が 0 以上の実数または正の無限大である数列 $(b_i)_i$ $(b_i \geq 0)$ が与えられたとき、その数列を素因子指数列とする、自然数の並べ替えとなる数列 $(a_n)_n$ が存在する。□

証明. 仮定を満たす数列 $(b_i)_i$ $(b_i \geq 0)$ を素因子指数列とする、自然数の並べ替えとなる数列 $(a_n)_n$ を構成する方法を一つ示す。

まず $a_1 = 1$ とする。

$b_i = 0$ となる P_i を素因数として含む自然数 n については、n がある合成数 m の平方のとき $a_{m^2} = m$、ある合成数の平方でない n に対しては、a_n に、a_1 から a_{n-1} までに割り当てられていない最小の素数を割り当てる。

n の任意の素因数 P_i について $b_i > 0$ が成り立つとき、a_n の値を以下のようにして決定する。各指標素数 P_i について、a_n の P_i の指数の範囲を下記の条件を満たすように定めた後、候補となる数のうち a_1 から a_{n-1} までに割り当てられていない最小のものを a_n に割り当てる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k > n\, b_i \text{ ならば、} \mathrm{ord}_{P_i} a_n = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k \leq n\, b_i \text{ かつ } \mathrm{ord}_{P_i} n \text{ が偶数ならば、} \mathrm{ord}_{P_i} a_n \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k \leq n\, b_i \text{ かつ } \mathrm{ord}_{P_i} n \text{ が奇数かつ } b_i < \infty \text{ ならば、}$$

$$\mathrm{ord}_{P_i} a_n \geq [n\, b_i] + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k \leq n\, b_i \text{ かつ } \mathrm{ord}_{P_i} n \text{ が奇数かつ } b_i = \infty \text{ ならば、}$$

$$\mathrm{ord}_{P_i} a_n \geq \Big[\frac{n}{P_i}\Big] \left[\log_{P_i} \mathrm{ord}_{P_i} n\right] - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{ord}_{P_i} a_k$$

このようにして a_n を決定すると、任意の自然数は $(a_n)_n$ のいずれかの項に 1 回だけ割り当てられ、$(a_n)_n$ の素因子指数列は $(b_i)_i$ に一致する。 ■

なお、証明の最後の $b_i = \infty$ のときの条件式は、$\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{ord}_{P_i} a_k$ が発散しさえすれば、異なる形でもかまいません。

自然数を小さい順に並べた数列の素因子指数列が $\left(\dfrac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \ldots\right)$ であり、すべての指標素数に対して有限の値となっているにもかかわらず、それを並べ替えることによって、いずれの項も 0 以上の、無限大も含む任意の値をとる素因子指数列を生み出すことができるということは興味深いことと思われます。

7.1　今後の方向性

自然数の無限集合で、素因数色彩が存在するものについて、有限集合の場合における命題 2 と同様の命題が成り立ちます。

このことを使った興味深い現象の一つとして、任意の偶数と任意の奇数の積は必ず偶数ですが、その素因数色彩の期待値は自然数全体の集合と同じになります。このような現象を詳しく調べることにより、暗号解読などに応用できるものがあるかもしれません。

たとえば、一見、偶数がランダムに並んだように見える数の列があったとき、その素因数色彩が自然色彩に近いことがわかると、それは単に偶数をランダムに並べたものであるよりは、偶数と奇数をかけあわせた数の列である可能性が高いと言えます。つまり、素因数色彩という分光器にかけることにより、暗号を生成した手法を推測することが可能になる場合があるということです。

素因子指数列や素因数色彩に何らかの変換を施すことによりいくつかの特徴的な値を取り出したり、素因子指数列や素因数色彩の間の演算や比較などを定義することにより、それらの性質を詳しく調べることができるかもしれません。

たとえば、色彩の理論における HSV 色空間 (色相、彩度、明度) に対応する概念を考えることができます。色相は、素因数色彩のグラフが自然色彩と比べてどのくらい小さい素数、または大きい素数の方に偏っているかで表わせます。彩度は、素因数色彩のグラフがどのくらい特定の素数に集まっているかで表わせます。特定の素数またはそのベキ (の集合) は彩度が最も強いことになります。明度は、素因数色彩の強さ (数列の場合は、素因数色彩の強さが大きくなる速さも考察の対象にできます) で表わせます。

さらに、集合の定義のしかたによっては素因子指数列の 0 でない最後の項の順位が必ずしも有限でないことも考えられ、ある意味での自然数の概念の拡張を考えることになるかもしれません。

P.S.

中道寿一 (2014)『政策構想の政治学』の中に、10 ページ余りにわたって故内山秀夫氏 (上記の『規模とデモクラシー』の訳者) の政治学への論評が収められています。その中に

> 「生活のぎりぎりのところで、ほかに仕様もない問題に苦しむ、その苦しみの共有をもって文化的共通項とする市民集団の成立こそが、我々の市民像なのである」として、「最大公約数を求める政治」から「最小公倍数を求める政治」に組み替えていく　(p.136)

というくだりがあり、不思議な縁を感じました。「最小公倍数を求める政治」というのはちょっとわかりにくい表現ですが、私なりに言い換えると、「マイノリティを切り捨てず、共感する政治」と言ってもいいのではないかと思います。

参考文献

加藤和也・黒川信重・斎藤毅, 2005. 『数論 I — Fermat の夢と類体論』. 岩波書店.

河田敬義, 1978. 『数論 II』(岩波講座 基礎数学). 岩波書店.

黒川信重, 2014. 『ガロア理論と表現論 — ゼータ関数への出発』. 日本評論社.

高木貞治, 1931. 『初等整数論講義』. 岩波書店.

素因数色彩の理論 (素因数分布論) 要約

2018 年 3 月 3 日　浜田忠久

プラトンは $N\acute{o}\mu o\iota$(『法律』) の中で、都市国家における理想的な市民 (= 家長 = 有権者) の数を 5040 としています。米国の政治学者ロバート・ダールは *Size and Democracy* (1973) でこれを引用して、

> 「民主主義者ではないが、プラトンは、市民国がどの市民もお互いのことを知り、かつ友好であることができるくらいに小規模であることの望ましさを強調した。プラトンはさらに市民国の家長数の適正規模を 5040 人と算出することまでもした」(翻訳: 筆者)

と書いています。さらに米国のコミュニケーション論の研究者ジェームズ・ケアリーは *Communication as Culture* (1989) でダールの上記の著書を引用し、

> 「5040 という数は度を越して具体的過ぎるという誤りをおかしているが、万人参加へのデモクラシーの要請を表している。それよりも多人数だと民主的な議論は不可能である」(翻訳: 筆者)

と論じています。

プラトンは『法律』において、クレテ島内に建設すると想定されているモデル国家のあるべき姿を詳細に説明する中で、5040 という数は約数を 60 個もち、1 から 10 までのすべての整数でわりきれるから、公平な分配という観点から望ましい、と述べています。民主的な議論との関係についての記述は、残念ながら見当たりませんでした。

プラトン自身が問題にしたかどうかはともかく、民主的な議論や社会的決定と参加者数との関係は重要で興味深い問題なので別途議論したいと思いますが、ここでは、5040 の数としての特性について考えてみたいと思います。

まず、5040 は **階乗数** でありかつ **高度合成数** (highly composite number) です。高度合成数はラマヌジャンが考案した概念で、自然数で、それ未満のどの自然数よりも約数の個数が多いものを言います。

階乗数を小さい順に並べた数列、

$$(n!)_n = (1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots)$$

と、高度合成数を小さい順に並べた数列、

$$\begin{aligned}(HCN_n)_n =&(1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040,\\ &7560, 10080, 15120, 20160, 25200, 27720, 45360, 50400, 55440, 83160, 110880,\\ &166320, 221760, 277200, 332640, 498960, 554400, 665280, 720720, 1081080,\\ &1441440, 2162160, 2882880, 3603600, 4324320 \dots)\end{aligned}$$

を見比べると、$7!$ ($= 5040$) 以下の階乗数はすべて高度合成数ですが、$8!$、$9!$、$10!$ は高度合成数ではありません。実は、$8!$ 以上の階乗数で、高度合成数となるものはありません。つまり、5040 は、階乗数でありかつ高度合成数となる最大の数なのです。

次に、最初の「合成数である高度合成数」(純高度合成数) の 4 から出発して、その数だけの個数の約数をもつ最小の数の列を作ると、

$$4 \to 6 \to 12 \to 60 \to 5040 \to 293318625600$$

という特別な高度合成数の列ができます。これを**プラトン高度合成数**と呼ぶことにします。プラトン高度合成数の列はどこまで続けることができるでしょうか。

293318625600 個の約数をもつ最小の数は

$$\begin{aligned}&670059168204585168371476438927421112933837297640990904154667968000000000000\\&\fallingdotseq 6.7 * 10^{74}\end{aligned}$$

ですが、実はこれは高度合成数ではありません。つまりプラトン高度合成数は上記の 6 個しかありません。

このように、比較的小さい数において成り立っていることが巨大な数では必ずしも成り立たなくなることを説明するために役に立つ概念として、以下に述べる素因子指数列および素因数色彩の概念を導入します。

ある自然数 n が

$$n = {P_1}^{e_1} * {P_2}^{e_2} * \dots {P_m}^{e_m} \quad (\text{ただし、}P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5, \dots)$$

と素因数分解されるとき、n に

$$(e_i)_i = (e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_m,\ 0,\ \dots) = (\mathrm{ord}_{P_1} n,\ \mathrm{ord}_{P_2} n,\ \dots \mathrm{ord}_{P_m} n,\ 0,\ \dots) = (\mathrm{ord}_{P_i} n)_i \tag{44}$$

という数列を対応させ、その数列を「**素因子指数列**」(prime factor exponential sequence) と呼び、pfes(n) と書くことにします。また、素因子指数列を計算する際に指標となる個々の素数 P_i を **指標素数** (index prime number) と呼ぶことにします。ここで、$\mathrm{ord}_p n$ は n の p 進付値であり、有理数や代数的数の場合に自然に拡張することもできますが、本稿では自然数の範囲で議論します。

さて、 1 を除く自然数の素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数の 「**素因数色彩**」 (prime factor color) と定義し (1 の素因数色彩は $(0)_i$ (すべての項が 0 の数列) とします)、pfc(n) と書くことにします。素因数色彩は、その数に含まれる素因数の分布を表す数列といえます。また、素因子指数列の最大値を、その数の**素因数色彩の強さ**と定義し、s(n) と書くことにします。

なお、(44) の最左辺と最右辺のように、素因子指数列や素因数色彩の指標素数の番号を表わす文字としては原則として「i」を用いることにし、一般の数列の項番号には「n」などを用いて区別することにします。

数列の素因子指数列、素因数色彩

ある数列 $(a_n)_n$ の各項に対応する素因子指数列や素因数色彩の各項が、収束あるいは n の関数で近似できる場合があります。例を挙げます。

階乗数 階乗数を小さい順に並べた数列、

$$(n!)_n = (1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots)$$

の各項の p 進付値は、

$$\frac{n+1}{P_i - 1} - \log_{P_i}(n+1) \le \mathrm{ord}_{P_i} n \le \frac{n}{P_i - 1} - 1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ord}_{P_i} n}{n} = \frac{1}{P_i - 1} - O\left(\frac{\log_{P_i} n}{n}\right)$$

よって、素因子指数列、素因数色彩の近似式は、

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfes}(n!) = \left(\frac{n}{P_i - 1}\right)_i \tag{45}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfc}(n!) = \left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i \tag{46}$$

となります。素因子指数列は n に比例する因数がつくので発散しますが、素因数色彩は収束します。また素因子指数列の各指標素数に対応する項を表わす式の第 2 項は、素因数色彩においては n を限りなく大きくするときに無視できます。

高度合成数 高度合成数を小さい順に並べた数列、

$$\begin{aligned}&(HCN_n)_n \\ &= (1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, \dots)\end{aligned}$$

の各項の素因子指数列、素因数色彩の近似式は、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfes}(HCN_n) &= \left(\frac{\log HCN_n}{\omega(HCN_n)\log P_i}\right)_i \\ &= \frac{\log HCN_n}{\omega(HCN_n)}\left(\frac{1}{\log P_i}\right)_i\end{aligned} \tag{47}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pfc}(HCN_n) = \left(\frac{1}{\log P_i}\right)_i \tag{48}$$

となります。ここで、自然数 n の相異なる素因数の数を $\omega(n)$ と表します。また、特に断りのない限り、$\log$ の底を 2 とします。素因子指数列は HCN_n に伴って限りなく大きくなる因数がつくので発散しますが、素因数色彩は収束します。

ある数列の各項に対応する素因数色彩に極限が存在するとき、その極限の素因数色彩を**極限色彩** と呼ぶことにします。階乗数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を階乗

数の極限色彩、高度合成数を小さい順に並べてできる数列の極限色彩を高度合成数の極限色彩と呼ぶことにします。それぞれ (46) および (48) で与えられます。

先に述べた、階乗数かつ高度合成数や、プラトン高度合成数が有限個しか存在しないという事実は、階乗数の極限色彩、高度合成数の極限色彩、また高度合成数の約数の数の極限色彩がすべて異なる数列となることから説明できます。

また、数列全体の素因子指数列、素因数色彩を考えることもできます。有限数列 (仮に A とします) の場合は、素因子指数列を、その数列の各項の素因子指数列の指標素数ごとの平均、と定義し、pfes(A) と書くことにします。$A = (a_1、a_2、\ldots、a_N)$ とすると、

$$\mathrm{pfes}(A) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} \right)_i$$

と書けます。つまり、その数列から無作為に項を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる数列と考えます。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その数列の素因数色彩と定義し、pfc(A) と書くことにします。素因子指数列の最大値を、その数列の素因数色彩の強さと定義し、s(A) と書くことにします。

無限数列 (仮に B とします) に対しては、その数列の最初の N 個からなる有限数列の素因子指数列または素因数色彩について、N を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の各項の近似式が定まるとき、それらをその無限数列の素因子指数列または素因数色彩と定義し、pfes(B)、pfc(B) と書くことにします。$B = (b_n)_n$ とすると、

$$\mathrm{pfes}(B) = \left(\lim_{N\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} b_n}{N} \right)_i$$

と書けます。無限数列の素因子指数列または素因数色彩は、その無限数列の任意の項に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができます。

集合の素因子指数列、素因数色彩

自然数の集合の素因子指数列、素因数色彩については、その集合の元を小さい順に並べた数列を考えることにより、数列全体の素因子指数列、素因数色彩と全く同様に定義できます。

有限集合 (仮に A とします) の素因子指数列を、その集合の各元の素因子指数列の項ごとの平均、と定義し、pfes(A) と書くことにします。A の元を $a_1、a_2、\ldots、a_{|A|}$とすると、

$$\mathrm{pfes}(A) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{|A|} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{|A|} \right)_i$$

と書けます。つまり、その集合から無作為に元を取り出したときの各素因子の指数の期待値からなる数列と考えます。

そして、その素因子指数列の各項を、その素因子指数列の最大値でわることにより得られる数列を、その集合の素因数色彩と定義し、$\mathrm{pfc}(A)$ と書くことにします。素因子指数列の最大値を、その集合の素因数色彩の強さと定義し、$\mathrm{s}(A)$ と書くことにします。

自然数の無限集合 (仮に B とします) に対しては、その集合の元を小さい順に並べ、最初の N 個からなる有限集合の素因子指数列または素因数色彩について、N を限りなく大きくしていったときの素因子指数列または素因数色彩の各項の近似式が定まるとき、それらをその無限集合の素因子指数列または素因数色彩と定義し、$\mathrm{pfes}(B)$、$\mathrm{pfc}(B)$ と書くことにします。B の元を小さい順に並べたものを b_1、b_2、$\ldots$、とすると、

$$\mathrm{pfes}(B) = \left(\lim_{N\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} b_n}{N} \right)_i$$

と書けます。自然数の無限集合の素因子指数列または素因数色彩は、その無限集合の任意の元に対応する素因子指数列または素因数色彩の期待値と考えることができます。

以下、いくつかの例を示します。

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$　　$\{n\}_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\frac{1}{P_i - 1} \right)_i = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots \right)$$
$$\mathrm{pfc}(\mathbb{N}) = \left(\frac{1}{P_i - 1} \right)_i = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots \right)$$

どれだけ大きい自然数をとっても、その数以下の自然数の素因子 p の指数の期待値は高々 $\dfrac{1}{p-1}$ ということです。自然数の集合の素因数色彩を**自然色彩**と呼ぶことにします。

偶数　　$\{2\,n\}_n = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\{2\,n)_n) = \left(2,\ \frac{1}{P_2 - 1},\ \frac{1}{P_3 - 1},\ \ldots \right) = \left(2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots \right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{2\,n)_n) = \left(1,\ \frac{1}{2\,(P_2 - 1)},\ \frac{1}{2\,(P_3 - 1)},\ \ldots \right) = \left(1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \ldots \right)$$

奇数　　$\{2\,n-1\}_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}(\{2\,n-1\}_n) = \left(0,\ \frac{1}{P_2 - 1},\ \frac{1}{P_3 - 1},\ \ldots \right) = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \ldots \right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{2\,n-1\}_n) = \left(0,\ \frac{2}{P_2 - 1},\ \frac{2}{P_3 - 1},\ \ldots \right) = \left(0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots \right)$$

素数全体の集合 $\mathbb{P}$ 素数全体の集合 $\mathbb{P}$ の素因子指数列と素因数色彩は、

$$\mathrm{pfes}(\mathbb{P}) = (0)_i$$
$$\mathrm{pfc}(\mathbb{P}) = (1)_i$$

となります。

素数べきの集合 素数べき p^r (p は素数、r は自然数) の集合の素因子指数列は、

$$\mathrm{pfes}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = (0)_i$$

となります。素因数色彩は、

$$\mathrm{pfc}(\{p^r \mid p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}\}) = \left(\frac{1}{(\log P_i)^2}\right)_i$$

となります。

自然数の根基 自然数 n を無作為に採ったとき、その **根基** $\mathrm{rad}(n)$ (異なる素因数の積) の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{1}{P_i}\right)_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots\right)$$
$$\mathrm{pfc}((\mathrm{rad}(n))_n) = \left(\frac{2}{P_i}\right)_i = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \cdots\right)$$

素数の平行移動 m を 0 でない任意の整数の定数として、素数に m を加えた数 (「**素数の $\boldsymbol{m}$ 平行移動**」 と呼ぶことにします) から 0 を除いた集合の素因子指数列および素因数色彩は、

$$\mathrm{pfes}(\{p+m \mid p \in \mathbb{P}, p+m \neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{(P_n-1)^2}\right)_i = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{7}{36}, \cdots\right)$$
$$\mathrm{pfc}(\{p+m \mid p \in \mathbb{P}, p+m \neq 0\}) = \left(\frac{P_n}{2\,(P_n-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right)$$

となります。

自然数のオイラー関数 N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、そのオイラー関数 $\varphi(n)$ の素因子指数列および素因数色彩の期待値は、N を限りなく大きくすると、下記の数列に近づきます。

$$\mathrm{pfes}((\varphi(n))_n) = (\infty)_i = (\infty, \infty, \infty, \infty, \cdots)$$
$$\mathrm{pfc}((\varphi(n))_n) = \left(\frac{P_n}{2\,(P_n-1)^2}\right)_i = \left(1, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, \frac{7}{72}, \cdots\right)$$

なお、指標素数 p が、初項が 1、公差が p のべきである等差数列上に素数が早めに現れる数、たとえばソフィー・ジェルマン素数 ($2\,p+1$ もまた素数であるような素数 p) の場合、N が比較的小さい値では、N 以下の自然数における素因子指数列および素因数色彩の期待値が高い値となり、たとえば $p=31$ では $10\,p+1=311$ で初めて素数が現れるため、N が比較的小さい間は低い値となります。

三角数 $\{T_n\}_n = \left\{\dfrac{n\ (n+1)}{2}\right\}_n = \{1, 3, 6, 10, \ldots\}$

$$\mathrm{pfes}\Big(\Big\{\frac{n\ (n+1)}{2}\Big\}_n\Big) = \Big(\frac{1}{P_1 - 1},\ \frac{2}{P_2 - 1},\ \frac{2}{P_3 - 1},\ \ldots\Big) = \Big(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots\Big)$$
$$\mathrm{pfc}\Big(\Big\{\frac{n\ (n+1)}{2}\Big\}_n\Big) = \Big(\frac{1}{P_1 - 1},\ \frac{2}{P_2 - 1},\ \frac{2}{P_3 - 1},\ \ldots\Big) = \Big(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots\Big)$$

二項係数 最初の N 個の二項係数 (binomial coefficient) から 要素 n を無作為に採るものとし、N を限りなく大きくしていったときの n の素因子 p の指数の期待値の極限は、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\dfrac{r}{2}} = 1$$
$$\therefore \lim_{N\to\infty} \frac{E[\mathrm{ord}_p\, n]}{\dfrac{\log N}{2\ \log p}} = 1$$

となります。したがって、二項係数の素因子指数列および素因数色彩は以下の数列になります。

$$\mathrm{pfes}(\text{二項係数}) = \Big(\frac{\log N}{2\ \log P_i}\Big)_i = \frac{\log N}{2}\Big(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\Big)$$
$$\mathrm{pfc}(\text{二項係数}) = \Big(\frac{1}{\log P_i}\Big)_i = \Big(\frac{1}{\log P_1}, \frac{1}{\log P_2}, \cdots\Big)$$

二項係数の素因数色彩は高度合成数の素因数色彩 (および極限色彩) と全く同じであることもわかります。これはパスカルの三角形の一部を観察してもなかなか予想できないことであり、驚くべき結果といえます。

フィボナッチ数 $\{F(n)\}_n = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)\right\}_n$
$= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{pfes}(\{F(n)\}_n) &= \Big(\frac{5}{6},\ \frac{P_i}{a(P_i)\ (P_i - 1)}\Big)_i \\ &= \Big(\frac{5}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{48},\ \frac{11}{100},\ \frac{13}{168},\ \frac{17}{144},\ \frac{19}{324},\ \frac{23}{528},\ \frac{29}{392}, \ldots\Big) \\ \mathrm{pfc}(\{F(n)\}_n) &= \Big(1,\ \frac{6\,P_i}{5\,a(P_i)\ (P_i - 1)}\Big)_i \\ &= \Big(1,\ \frac{9}{20},\ \frac{3}{10},\ \frac{7}{40},\ \frac{33}{250},\ \frac{13}{140},\ \frac{17}{120},\ \frac{19}{270},\ \frac{23}{440},\ \frac{87}{980},\ \ldots\Big)\end{aligned}$$

ここで、$a(m)$ は自然数 m のエントリー・ポイントを表します。任意の自然数 m に対して、m でわりきれるフィボナッチ数 $F(n)$ が存在しますが、このような n のうちで最小の自然数を、m のエントリー・ポイントと言います。

自然数の約数の数 重複する値があるため、集合ではなく数列として考えます。

$$(d(n))_n = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, \dots)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pfes}((d(n))_n) &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{ord}_{P_i} k)\ (\zeta_{\mathrm{p}}(k-1) - \zeta_{\mathrm{p}}(k))\Big)_i \\ &\fallingdotseq (\infty,\ 0.30057, 0.04228, 0.00885, 0.00050, \dots) \\ \mathrm{pfc}((d(n))_n) &= (1, 0, 0, 0, \dots)\end{aligned}$$

ここで、$\zeta_{\mathrm{p}}(s)$ は素数ゼータ関数です。このように、$\{d(n)\}_n$の素因子指数列は、指標素数 2 において発散し、3 以上のすべての指標素数において収束するという著しい結果が得られました。

自然数の約数の和 N 以下の自然数 n を無作為に採ったとき、その約数の和$\sigma(n)$ の、指標素数 p に対する p 進付値は以下の値に近づきます。

$p = 2$ のとき、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_2\,\sigma(n)\,] = \sum_{i=2}^{\infty}\big((P_i - 1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{P_i^{2\,j} - 1} + \frac{\mathrm{ord}_2(P_i + 1) - 1}{P_i + 1}\big)$$

$p > 2$ のとき、

$$\lim_{N\to\infty} E[\,\mathrm{ord}_p\,\sigma(n)\,] = \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p>1}}^{\infty}(P_i - 1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{P_i^{p^j\,\mathrm{O}_p P_i} - 1} + \sum_{\substack{i=1 \\ P_i\ \%\ p=1}}^{\infty}(P_i - 1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{P_i^{p^j} - 1}$$

上式より、自然数の約数の和の、指標素数 p における p 進付値は、$p = 2$ のときに発散し、$p > 2$ のときに収束することがわかります。

10^6(百万) 以下の自然数について約数の和の各素因子pの指数の期待値を計算した結果を表 23 に示します。

$p = 2$ の行で 3 と 7 の位数の値に $(\times 2)$ や $(\times 2)$ をつけているのは、(35) 式の無限和の中の第 2 項があるためで、$\mathrm{ord}_2(3 + 1) = 2$ および $\mathrm{ord}_2(7 + 1) = 3$ を示します。また、$p = 2$ の行の各項目や $p = 3$ の行で「7 の位数」が「(3)」となっているのは、$7^1 \equiv 1 \pmod 3$ なので 3 を法とする 7 の位数は 1 ですが、(38) 式にあるように、位数が 1 の場合は無限和の各項の分母の P_i の指数が 1 ではなく p の倍数で計算するため、p として ( ) の中に入れました。

表 23. $\sigma(n)$ の p 進付値の期待値 ($p = 31$ まで)

p	p 進付値	2 の位数	3 の位数	5 の位数	7 の位数	11 の位数
2	4.324325	–	(2)(× 2)	(2)	(2)(× 3)	(2)
3	1.776430	2	–	2	(3)	2
5	0.540818	4	4	–	4	(5)
7	0.478878	3	6	6	–	3
11	0.167498	10	5	5	10	–
13	0.185719	12	3	4	12	12
17	0.086396	8	16	16	16	16
19	0.120357	18	18	9	3	3
23	0.049584	11	11	22	22	22
29	0.036969	28	28	14	7	28
31	0.111774	5	30	3	15	30

全体に、指標素数 p が大きくなるほど p 進付値の値は小さくなる傾向がありますが、興味深いことに、$p = 13$、19、31 において逆転が起こっています。また、$p = 7$ の値は $p = 5$ の値からわずかしか小さくありません。その理由は以下のように説明できます。逆転が起こる指標素数は、比較的小さい素数の位数が小さいので、p 進付値の期待値が大きくなります。特に、3 と 7 と 31 はメルセンヌ素数なので、2 の位数が小さくなります。

素因子指数列の逆関数

ある数列が与えられたとき、それをある数の素因子指数列とみなして元の数を求めるという操作を考えてみます。つまり、数列 $(a_n)_n$ に対して $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n}$ を対応させる操作を、「**逆素因子指数列**」(inverse prime factor exponential sequence) と呼び、ipfes($(a_n)_n$) と書くことにします。

$$\mathrm{ipfes}(\ (a_n)_n\ ) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{a_n} \tag{49}$$

(49) の右辺が発散するときは正の無限大に発散するので、ipfes の値も正の無限大とします。たとえば、引数として自然数全体の集合の素因子指数列、$\mathrm{pfes}(\mathbb{N}) = \left(\dfrac{1}{P_i - 1}\right)_i$ をとれば、

$$\mathrm{ipfes}(\ \mathrm{pfes}(\mathbb{N})) = \mathrm{ipfes}\Big(\ \left(\frac{1}{P_n - 1}\right)_n\ \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{P_n - 1}} = +\infty \tag{50}$$

となります。この値が正の無限大に発散することは、(50) の第 3 辺の対数をとって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log P_n}{P_n - 1}$$

が正の無限大に発散することからもわかります。

逆素因子指数列は、拡張実数 (実数に正負の無限大を加えた集合) を項とする数列全体を定義域とし、拡張実数を値域とする写像と考えることができます。数列が与えられるとそれに対応する逆素因子指数列が定まりますが、実数が与えられてもその実数を逆素因子指数列の値とする数列は一意に定まりません。

ある数列の素因子指数列の逆素因子指数列をその数列の「**素因子投影**」(prime factor projection) と呼び、pfp($(a_n)_n$) (= ipfes(pfes($(a_n)_n$))) と書くことにします。ある数列と、その素因子投影の間の関係について、以下の命題が成り立ちます。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはありませんが、元の数列の項として有理数や代数的数を考える場合、その p 進付値が負となる場合があるので、そのことを踏まえた命題とします。なお、自然数の数列や集合の素因子指数列の各項が負の値となることはないので、その逆素因子指数列が収束するときは必ず絶対収束となります。

命題 9. ある数列 $(a_n)_n$ の素因子指数列 $(b_i)_i$ ($= \mathrm{pfes}((a_n)_n)$) の各項の絶対値が 0 でない有限の実数 ($0 < |b_i| < \infty$) で、その逆素因子指数列 (つまり元の数列の素因子投影) が絶対収束するとき、その値は元の数列の幾何平均の極限に一致する。すなわち、

$$\mathrm{ipfes}((b_i)_i) = \mathrm{pfp}((a_n)_n) = \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)^{\frac{1}{N}}$$

が成り立つ。□

これまでに見てきた自然数の無限集合の多くは、素因子投影が無限大となります。一般に、ある数列が正の無限大に発散する、つまり任意の実数 μ に対して自然数 $n_0(\mu)$ が定まって、

$$n > n_0(\mu) \longrightarrow a_n > \mu$$

となるとき、その数列の幾何平均も正の無限大に発散します。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \longrightarrow \lim_{N\to\infty} \Big(\prod_{n=1}^{N} a_n\Big)^{\frac{1}{N}} = +\infty$$

が成り立ちます。しかし、正の無限大に発散する数列であっても、その素因子投影が有限の値となる場合があります。つまり、自然数の無限集合であっても、その素因子投影が有限の値となるものがあるということです。典型的な例が素数全体の集合 $\mathbb{P}$ や素数べきの集合で、素因子指数列が $(\ 0\ )_i$ となるので、素因子投影は 1 となります。

さらに、数列の素因子投影が有限の値をもつための条件を詳しく考えてみます。たとえば (50) の左辺において P_n に 1 より大きい指数をつけることが考えられます。指数が 1 より大きい実数であれば有限の値となりますが、たとえば 2 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\ \Big(\frac{1}{{P_n}^2 - 1}\Big)_n\ \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^2-1}} \tag{51}$$

となります。(51) の右辺が収束することは、(50) と同様に対数をとればわかります。それでは、逆に (51) の左辺の引数の数列を素因子指数列とする元の数列を構成することはどのようにしてできるでしょうか。たとえば、第 n 項を、n の平方因子の平方根 (つまり $\sqrt{n}$ で n の平方因子を取り出して $\sqrt{n} = a\sqrt{b}$ と変形したときの a) とし、n が平方因子をもたないときは 1 とする数列

$$(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, \dots)$$

の素因子指数列は (51) の左辺の引数の数列に一致します。この数列自体は発散しますが、その素因子投影は有限の値となるということです。

また、(50) において P_n の指数を 3 とすると、

$$\mathrm{ipfes}\Big(\ \Big(\frac{1}{{P_n}^3 - 1}\Big)_n\ \Big) = \prod_{n=1}^{\infty} {P_n}^{\frac{1}{{P_n}^3-1}} \tag{52}$$

となります。左辺は、第 n 項を、n の立方因子の立方根 (つまり $\sqrt[3]{n}$ で n の立方因子を取り出して $\sqrt[3]{n} = a\sqrt[3]{b}$ と変形したときの a) とし、n が立方因子をもたないときは 1 とする数列の素因子指数列に一致します。

さて、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ $\{n\}_n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ の素因子指数列 (あるいは、自然数を小さい順に並べた数列 $(n)_n$ の素因子指数列とも言いかえられます) の逆素因子指数列 (つまり $\mathbb{N}$ の素因子投影) が正の無限大に発散することは前に見ましたが、自然数の並べ

替えとなる数列 (つまり $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射) で、素因子投影が有限の値になるものは存在するでしょうか。

実は、数列をうまく定義することにより、その素因子指数列を $(0)_i$、したがってその素因子投影を 1 にすることができます。

数列 $(a_n)_n$ を、n がある合成数 m の平方のとき $a_n = m$、ある合成数の平方でない n に対しては、a_n に 1 および素数を順次割り当てることにすると、

$$\begin{aligned}(a_n)_n = (&1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 4, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79,\\ &83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 6, 139, 149, \dots)\end{aligned}$$

となります。ここで、$a_{16} = 4, a_{36} = 6, a_{64} = 8,$ などとなります。したがって、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n &< \frac{\sqrt{N}}{(P_i - 1)} \\
\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} &< \frac{1}{\sqrt{N}(P_i - 1)} \\
\therefore\ \lim_{N \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ord}_{P_i} a_n}{N} &= 0 \\
\mathrm{pfes}((a_n)_n) &= (0)_i \\
\mathrm{pfp}((a_n)_n) &= 1
\end{aligned}$$

このようにして、自然数の並べ替えとなる数列で、その素因子指数列が $(0)_i$ となるものが存在し、またその構成法の一つを示すことができました。

次に、自然数の並べ替えとなる数列の素因子指数列の項はどこまでの範囲の値を取り得るでしょうか。実は、以下の命題が成り立ちます。

命題 10. 各項が 0 以上の実数または正の無限大である任意の数列 $(b_i)_i$ $(b_i \geq 0)$ が与えられたとき、その数列を素因子指数列とする、自然数の並べ替えとなる数列 $(a_n)_n$ が存在する。□

自然数を小さい順に並べた数列の素因子指数列が $\left(\frac{1}{P_i - 1}\right)_i = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$ であり、すべての指標素数に対して有限の値となっているにもかかわらず、それを並べ替えることによって、いずれの項も 0 以上の、無限大も含む任意の値をとる素因子指数列を生み出すことができるということは興味深いことと思われます。

パスカルの三角形 (二項係数)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1

パスカルの三角形 (二項係数) の素因数分解

1

1 1

w 1 2 1

1 3 3 1

$1 \quad 2^2 \quad 2\cdot 3 \quad 2^2 \quad 1$

$1 \quad 5 \quad 2\cdot 5 \quad 2\cdot 5 \quad 5 \quad 1$

$1 \quad 2\cdot 3 \quad 3\cdot 5 \quad 2^2\cdot 5 \quad 3\cdot 5 \quad 2\cdot 3 \quad 1$

$1 \quad 7 \quad 3\cdot 7 \quad 5\cdot 7 \quad 5\cdot 7 \quad 3\cdot 7 \quad 7 \quad 1$

$1 \quad 2^3 \quad 2^2\cdot 7 \quad 2^3\cdot 7 \quad 2\cdot 5\cdot 7 \quad 2^3\cdot 7 \quad 2^2\cdot 7 \quad 2^3 \quad 1$

$1 \quad 3^2 \quad 2^2\cdot 3^2 \quad 2^2\cdot 3\cdot 7 \quad 2\cdot 3^2\cdot 7 \quad 2\cdot 3^2\cdot 7 \quad 2^2\cdot 3\cdot 7 \quad 2^2\cdot 3^2 \quad 3^2 \quad 1$

$1 \quad 2\cdot 5 \quad 3^2\cdot 5 \quad 2^3\cdot 3\cdot 5 \quad 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \quad 2^2\cdot 3^2\cdot 7 \quad 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \quad 2^3\cdot 3\cdot 5 \quad 3^2\cdot 5 \quad 2\cdot 5 \quad 1$

$1 \quad 11 \quad 5\cdot 11 \quad 3\cdot 5\cdot 11 \quad 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11 \quad 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11 \quad 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11 \quad 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11 \quad 3\cdot 5\cdot 11 \quad 5\cdot 11 \quad 11 \quad 1$

$1 \quad 2^2\cdot 3 \quad 2\cdot 3\cdot 11 \quad 2^2\cdot 5\cdot 11 \quad 3^2\cdot 5\cdot 11 \quad 2^3\cdot 3^2\cdot 11 \quad 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11 \quad 2^3\cdot 3^2\cdot 11 \quad 3^2\cdot 5\cdot 11 \quad 2^2\cdot 5\cdot 11 \quad 2\cdot 3\cdot 11 \quad 2^2\cdot 3 \quad 1$

$\cdots\cdots$

$1 \quad 17 \quad 2^3\cdot 17 \quad 2^3\cdot 5\cdot 17 \quad 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 17 \quad 2^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17 \quad 2^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17 \quad 2^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \quad 2\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 17$

$2\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \quad 2^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \quad 2^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17 \quad 2^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17 \quad 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 17 \quad 2^3\cdot 5\cdot 17 \quad 2^3\cdot 17 \quad 17 \quad 1$