高橋君からのチャレンジ問題 解答案

浜田忠久

2018 年 3 月 9 日

1 やさしい問題

まず、任意の自然数 a に対して、以下が成り立つことを確認しておきます。

$a = 1$ のとき

$$\sigma(a) = 1 \tag{1}$$
$$\varphi(a) = 1 \tag{2}$$

$a \geq 2$ のとき

$$\sigma(a) \geq a + 1 \quad (\text{等号成立} \iff a \text{ が素数}) \tag{3}$$
$$\varphi(a) \leq a - 1 \quad (\text{等号成立} \iff a \text{ が素数}) \tag{4}$$

1.1 $\sigma(\sigma(a) + 1) = a + 3$ を満たす a は何か.

まず (1) を代入し、$a \neq 1$ を確認しておきます。
次に (3) を繰り返し適用し、

$$\sigma(\sigma(a) + 1) \geq \sigma(a) + 2 \geq a + 3$$

が成立します。最左辺と最右辺が等しくなることと、上式のすべての不等号において等号が成り立つことは同値です。
第 2 辺 = 第 3 辺 より a は素数。さらに第 1 辺 = 第 2 辺 より $a+2$ は素数。したがって、a は双子素数の小さい方になります。

1.2　$\varphi(2\,\varphi(a)+3)=2\,a$ を満たす a は何か.

まず (2) を代入し、$a \neq 1$ を確認しておきます。
次に (4) を繰り返し適用し、

$$\varphi(2\,\varphi(a)+3) \leq 2\,\varphi(a)+2 \leq 2\,(a-1)+2 = 2\,a$$

が成立します。最左辺と最右辺が等しくなることと、上式のすべての不等号において等号が成り立つことは同値です。

第 2 辺 = 第 3 辺 より a は素数。さらに第 1 辺 = 第 2 辺 より $2a+1$ は素数。したがって、a はソフィー・ジェルマン素数になります。

1.3　$\sigma(\sigma(\sigma(a)+3)+1)=a+7$ を満たす a は何か.

まず (1) を代入し、$a \neq 1$ を確認しておきます。
次に (3) を繰り返し適用し、

$$\sigma(\sigma(\sigma(a)+3)+1) \geq \sigma(\sigma(a)+3)+2 \geq \sigma(a)+6 \geq a+7$$

が成立します。最左辺と最右辺が等しくなることと、上式のすべての不等号において等号が成り立つことは同値です。

第 3 辺 = 第 4 辺 より a は素数。さらに第 2 辺 = 第 3 辺 より $a+4$ は素数。さらに第 1 辺 = 第 2 辺 より $a+6$ は素数。したがって、a は p、$p+4$、$p+6$ となる三つ子素数の最小のものになります。

1.4　$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(a)+3)+5)+3)=a+7$ を満たす a は何か.

まず (2) を代入し、$a \neq 1$ を確認しておきます。
次に (4) を繰り返し適用し、

$$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(a)+3)+5)+3) \leq \varphi(\varphi(\varphi(a)+3)+5)+2 \leq \varphi(\varphi(a)+3)+6 \leq \varphi(a)+8 \leq a+7$$

が成立します。最左辺と最右辺が等しくなることと、上式のすべての不等号において等号が成り立つことは同値です。

第 4 辺 = 第 5 辺 より a は素数。さらに第 3 辺 = 第 4 辺 より $a+2$ は素数。さらに第 2 辺 = 第 3 辺 より $a+6$ は素数。さらに第 1 辺 = 第 2 辺 より $a+8$ は素数。したがって、a は四つ子素数の最小のものになります。

2 難しい問題

2.1 $\sigma(\sigma(a)+6\,n)=2\,a+6\,n$ (n : は自然数) のとき a は平方数になるか.

$a=2^m$ $(m\geq 0)$ とすると、$\sigma(2^m)=2^{m+1}-1$ および (3) を適用し、

$$\sigma(\sigma(a)+6\,n)=\sigma((2^{m+1}-1)+6\,n)\geq 2^{m+1}+6\,n=2\,a+6\,n$$

が成り立ち、等号成立は $2^{m+1}-1+6\,n$ が素数であることと同値です。ここで m が奇数のときは $2^{m+1}-1+6\,n$ は 3 の倍数となり、素数にはなりません。m が偶数のとき、$2^{m+1}-1$ は 6 と互いに素なので、Dirichlet の定理により、m を固定したとき公差 6 の等差数列 $2^{m+1}-1+6\,n$ には無限に素数があるので、必ずその a $(=2^m)$ を解とする n が存在します。

$a=2^m$ $(m\geq 0)$ でない場合については、条件を絞り込むことは困難です。

$1\leq n\leq 13$、$1\leq a\leq 10^6$ の範囲で解を探索した結果をつけます。

$$
\begin{aligned}
n=1 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,7^2,2^{10}\\
n=2 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,2^6,2^8,2^{14}\\
n=3 &\text{ のとき、}a=1,2^{12}\\
n=4 &\text{ のとき、}a=2^2,2^6\\
n=5 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,2^6,2^8,2^{12},2^{14},2^{16}\\
n=6 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,2^6,2^8,2^{10},2^{14}\\
n=7 &\text{ のとき、}a=1,2^4,2^{10},2^{12},2^{16}\\
n=8 &\text{ のとき、}a=2^4\\
n=9 &\text{ のとき、}a=2^2,7^2,2^6,2^{18}\\
n=10 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^8,2^{18}\\
n=11 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,2^6,2^8,2^{10},2^{14},2^{18}\\
n=12 &\text{ のとき、}a=1,2^2,2^4,2^6,2^{12},2^{14},2^{16}\\
n=13 &\text{ のとき、}a=1,2^4,2^{12},2^{16}
\end{aligned}
$$

以上より、$a=2^m$ $(m\geq 0)$ には m が偶数 (a が平方数) のとき必ず a を解とするような n が存在し、m が奇数のときは解がありません。逆に n を固定して考えると、$a=2^m$ $(m\geq 0)$ という形の解が存在するとすれば平方数に限るといえます。それ以外の解は $a=7^2$ だけしか見つかっていません。平方数以外の解が存在するかについては確認できていません。

2.2 $\sigma(\varphi(a)+3)=a+3$ を満たす a は何か.

(3)、(4) より、a と $a+2$ が共に素数のとき、与式は成り立つので、a が双子素数の小さい方であることは十分条件であり、a が素数のときは双子素数の小さい方であることが必要でもあります。

それ以外の解について、条件を簡潔に記述することはまだできていません。$1 \le a \le 10^6$ の範囲で、素数以外の解は以下のとおりです。

$$\begin{aligned}
21 &= 3\times 7\\
153 &= 3^2\times 17\\
309 &= 3\times 103\\
2277 &= 3^2\times 11\times 23\\
3325 &= 5^2\times 7\times 19\\
4461 &= 3\times 1487\\
6477 &= 3\times 17\times 127\\
12957 &= 3\times 7\times 617\\
29037 &= 3\times 9679\\
103677 &= 3\times 7\times 4937\\
126973 &= 7\times 11\times 17\times 97\\
221181 &= 3\times 73727
\end{aligned}$$

2.3 $\sigma(\sigma(a))=8\,\varphi(\varphi(a))$ を満たす a は何か.

$a=2^m$ $(m\ge 2)$ とすると、$\sigma(2^m)=2^{m+1}-1$、$\varphi(2^m)=2^{m-1}$ および (3) を適用し、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sigma(\sigma((a))) = \sigma(2^{m+1}-1) \ \ge\ 2^{m+1}\\
\text{右辺} &= 8\,\varphi(\varphi(a)) = 8\,\varphi(2^{m-1}) = 8\times 2^{m-2} = 2^{m+1}
\end{aligned}$$

が成り立ち、第 1 式の等号成立は $2^{m+1}-1$ が素数であることと同値です。したがって、p を 7 以上のメルセンヌ素数とすると、

$$a = \frac{p+1}{2}$$

であることは十分条件となります。$1 \le a \le 10^6$ の範囲では以下の 6 個です。

$$4=2^2、16=2^4、64=2^6、4096=2^{12}、65536=2^{16}、262144=2^{18}$$

他にも解は多数あります。p を素数とし、

$$\frac{\sigma(\sigma(p))}{\varphi(\varphi(p))}=\frac{\sigma(p+1)}{\varphi(p-1)}=8$$

が成り立てば、p は解となります。10^6 以下の素数でこの条件を満たすものは以下の 8 個です。

$$1511,\ 40151,\ 115499,\ 162007,\ 175939,\ 245719,\ 620831,\ 737479$$

その他の合成数で条件を満たすものについて、どのような因数が含まれやすいかを考えてみます。p を素数とし、

$$\frac{\sigma(\sigma(p))}{\varphi(\varphi(p))} = \frac{\sigma(p+1)}{\varphi(p-1)}$$
$$\frac{\sigma(\sigma(p^2))}{\varphi(\varphi(p^2))} = \frac{\sigma(p^2+p+1)}{\varphi(p\,(p-1))}$$

のおのおのについて、既約分数にしたときの分母、分子を素因数分解したものが比較的単純なものになっていれば、そのような p や p^2 は因数として含まれやすいといえます。なお、分子において $2^1 \sim 2^3$ の部分は無視してかまいません。たとえば $p = 2557$ とすると、

$$\frac{\sigma(\sigma(2557))}{\varphi(\varphi(2557))} = \frac{\sigma(2558)}{\varphi(2556)} = \frac{2^8 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{2^5}{7}$$

と、単純な分数になります。$1 \leq a \leq 10^6$ の範囲で 2557 を素因数としてもつ解は、以下の 5 個あります。

$$202003 = 79 \times 2557、350309 = 137 \times 2557、692947 = 271 \times 2557$$
$$846367 = 331 \times 2557、902621 = 353 \times 2557$$

また、$p^2 = 19^2$ とすると、

$$\frac{\sigma(\sigma(19^2))}{\varphi(\varphi(19^2))} = \frac{\sigma(19^2+19+1)}{\varphi(19 \times 18)} = \frac{2^9}{2^2 \times 3^3} = \frac{2^7}{3^3}$$

と、比較的単純な分数になります。$1 \leq a \leq 10^6$ の範囲で 19^2 を因数としてもつ解は、以下の 1 個です。

$$114437 = 19^2 \times 317$$

なお、p^3 については、

$$\varphi(\varphi(p^3)) = \varphi(p^2(p-1)) = p(p-1)\varphi(p-1)$$

となり、分母に p 自身が残ってしまうので、比較的大きな p について、p^3 が素因数として含まれる可能性は極めて低いと考えられます。

上に述べた他にも、かけ合わせる数の組み合わせによって最終的な分数が単純になる場合があります。たとえば、

$$7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400 = 2^4 \times 5^2$$

となるので、$58591 = 13 \times 4507$ は以下のように計算され、解となります。

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(\sigma(13\times 4507))}{\varphi(\varphi(13\times 4507))} &= \frac{\sigma(2\times 7\times 2^2\times 7^2\times 23)}{\varphi(2^2\times 3\times 2\times 3\times 751)} = \frac{\sigma(2^3\times 7^3\times 23)}{\varphi(2^3\times 3^2\times 751)}\\ &= \frac{3\times 5\times 2^4\times 5^2\times 2^3\times 3}{2^2\times 2\times 3\times 2\times 3\times 5^3} = \frac{2^7\times 3^2\times 5^3}{2^4\times 3^2\times 5^3} = 2^3\end{aligned}$$

$1 \le a \le 10^6$ の範囲に 52 個の解がありますが、そのうち、$\dfrac{\text{メルセンヌ素数}+1}{2}$ となる 2 のべきが 6 個、素数が 8 個、2 のべきでない合成数が 38 個あります。2 のべきでない合成数のうち、素因数分解して $p \times q$ の形のものが 36 個、$p^2 \times q$ の形のものが 2 個となっています。

2.4 $(p-1)^2\sigma(a) = p^2\varphi(a) - (p-1)$ $(p:\text{素数})$ を満たす a は何か.

与式より、

$$(p-1)((p-1)\sigma(a)+1) = p^2\varphi(a) \tag{5}$$

したがって、$\varphi(a)$ は $p-1$ の倍数でなければなりません。$a = p^r$ $(r \ge 1)$ とおくと、

$$\begin{aligned}(5)\text{ の左辺} &= (p-1)\left((p-1)\,\frac{p^{r+1}-1}{p-1}\ +1\right)\\ &= (p-1)\left((p^{r+1}-1)\ +1\right)\\ &= p^{r+1}(p-1)\\ (5)\text{ の右辺} &= p^2\ p^{r-1}(p-1)\\ &= p^{r+1}(p-1)\end{aligned}$$

となります。したがって、$a = p^r$ $(r \ge 1)$ は十分条件です。

次に、(5) において $a = p^r b$ $(r \ge 1,\ b$ と p は互いに素$)$ とおくと、

$$\begin{aligned}(p-1)\left((p-1)\,\frac{p^{r+1}-1}{p-1}\ \sigma(b)+1\right) &= p^2\ p^{r-1}(p-1)\ \varphi(b)\\ (p-1)\left((p^{r+1}-1)\ \sigma(b)+1\right) &= p^{r+1}(p-1)\ \varphi(b)\\ (p^{r+1}-1)\ \sigma(b)+1 &= p^{r+1}\ \varphi(b)\end{aligned}$$

左辺 $\equiv 1 \pmod{p-1}$ なので 右辺 $\equiv 1 \pmod{p-1}$ でなければならないから、

$$\varphi(b) \equiv 1 \pmod{p-1} \tag{6}$$

ここで p が奇素数とすると、$p-1$ は偶数なので、(6) が成り立つためには b は 1 または 2 でなければなりません。$b = 2$ とすると、$a = 2\,p^r$ となり、(5) が成り立たないので、$b = 1$ でなければなりません。

以上より、a が p の倍数のときは、$a = p^r$ $(r \geq 1)$ は解となります。p が奇素数のときは他に素因数をもちません。$p = 2$ のときは他に素因数をもつ場合があるかどうか、確認できていません。また、a が p を素因子として含まない解があるかどうかについても、確認できていません。

2.5 $2^n\,\varphi^n(a) = a$ $(n:$ 自然数$)$ を満たす a は何か.

任意の素数 p、自然数 r に対して、$\varphi(p^r) = p^{r-1}\,(p-1)$ であり、$p-1$ の素因子は p よりも小さくなるので、

$$\mathrm{ord}_p\,\varphi(p^r) = r - 1 < r = \mathrm{ord}_p\,p^r$$

ここで、$\mathrm{ord}_p\,a$ は a を素因数分解したときの p の指数を表します。したがって、p^r の φ をとることを繰り返すたびに、p の指数は 0 になるまで 1 ずつ小さくなります。

a が 2 以外の素因数をもつと仮定し、その最大素因子を p とおくと、p の指数は φ をとることを繰り返すたびに、0 になるまで 1 ずつ小さくなります。よって、

$$\mathrm{ord}_p\,(2^n\,\varphi^n(a)) < \mathrm{ord}_p\,a$$

となり矛盾します。したがって、a は 2 以外の素因数をもちません。

$a = 2^m$ $(m:$ 自然数$)$ とおくと、

$$\varphi^k(2^m) = \begin{cases} 2^{m-k} & (k \leq m) \\ 1 & (k \geq m) \end{cases}$$

したがって、$m \geq n$ のとき、$a = 2^m$ が解となります。

3　チャレンジ後記

高橋君は飯高先生の連続講座「高校生にも十分わかる新しい数論講義」で、いつもいちばん前の席に座り、飯高先生の講義に対してしばしば鋭い質問やコメントをしてくれる小学生です。そんな高橋君が考えた問題なので、これは挑戦しなければなるまいと思い、取り組みはじめました。

「やさしい問題」の 4 題は、σ 関数と φ 関数の特性を理解するために最適な問題で、「難しい問題」への準備となっています。本当に、心にくい問題配置といえます。

「難しい問題」も、いずれも取り組みがいのある問題でした。かなり頭をふりしぼりましたが、5 問目以外は完全な解明には至りませんでした。一部コンピュータの助けを借りて題意を満たす解の探索を百万 $(= 10^6)$ 以下の自然数について行い、いくつかの条件を見いだし、ここまでの結果を得ました。今後、さらに探求を進めていきたいと思いますが、ぜひ読者の皆さまも挑戦していただけたらと思います。

私は 4 年前から飯高先生の講座に参加させていただいています。小学生から大先輩までが共に学べるのは、数学という学問の醍醐味だと感じます。「あるはずの解」を理詰めで考え続ける楽しみを共有することができる仲間に出会えたことが何よりの喜びです。この講座に集う他の受講者の皆さまと有志の学習会も開催するようになりました。飯高先生も顧問として特別講義をしてくださっています。

私自身も、大人向けの数学講座や子ども向けの数学を取り入れたワークショップなどの講師をやる機会をいただくようになりました。その受講者の皆さまとも交流の輪が広がり、数学という共通言語を通じて、豊かなネットワークが築かれつつあります。解に至る道は無数に存在し、その中から美しい道にたどり着くアイディアを思いついた瞬間は、至福の時です。この達成感をたくさんの人と語り合うことができるよう、数学の学びのネットワークにつながる仲間を増やしていきたいと思います。