

1. 単位分数の髭の研究

名前 山崎 潤平

2. 前書き

最初に髭が何であるか例をあげて説明する. 例えば

$$\frac{1}{176} = 0.005681818181 \dots$$

$$\frac{1}{176} = 0.0056\dot{8}1$$

は0056が髭で81が循環節となる。

与えられた2つの数A, B に対してA をヒゲ、B を循環節とする。

A = 11, B = 26 とするような分数は存在する。

$$X = 0.112626262626 \dots$$

とすると分数を求める方式は

$$X = 0.1126\dots$$

$$100X = 11.26\dots$$

$$99X = 11.15$$

$$X = \frac{223}{1980}$$

となります。

3. 目的

次に有限小数と無限小数で分けて考える．有限小数のときの例をあげる．

例 $\frac{1}{8} = 0.125$ この場合，

髭は125であり循環節は無しと考える．考え方としては

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

とすればよい．次に無限小数のとき

$$\frac{1}{12} = 0.083333\dots$$

4. 詳細

単位分数の髭の研究をテーマにしたが、一般に考えると

難しいので一番簡単に髭が長くなる例で髭の研究をします。

分母が $2^r \times 3$ と $2^r \times 11$ の場合をやる。

分母が $2^r \times 3$ のとき.

r	鬚	循環節
1	1	6
2	0,8	3
3	0,4,1	6
4	0,2,0,8	3
5	0,1,0,4,1	6
6	0,0,5,2,0,8	3
7	0,0,2,6,0,4,1	6
8	0,0,1,3,0,2,0,8	3
9	0,0,0,6,5,1,0,4,1	6
10	0,0,0,3,2,5,5,2,0,8	3

r	髭	循環節
1	1	6
3	0,4,1	6
5	0,1,0,4,1	6
7	0,0,2,6,0,4,1	6
9	0,0,0,6,5,1,0,4,1	6

r が奇数のとき.

r	鬚	循環節
2	0,8	3
4	0,2,0,8	3
6	0,0,5,2,0,8	3
8	0,0,1,3,0,2,0,8	3
10	0,0,0,3,2,5,5,2,0,8	3

r が偶数のとき.

r	髭	循環節
1	0	4,5
2	0,2	2,7
3	0,1,1	3,6
4	0,0,5,6	8,1
5	0,0,2,8,4	0,9
6	0,0,1,4,2,0	4,5
7	0,0,0,7,1,0,2	2,7
8	0,0,0,3,5,5,1,1	3,6
9	0,0,0,1,7,7,5,5,6	8,1
10	0,0,0,0,8,8,7,7,8,4	0,9

分母が $2^r \times 11$ のとき.

11	0,0,0,0,4,4,3,8,9,2,0	4,5
12	0,0,0,0,2,2,1,9,4,6,0,2	2,7
13	0,0,0,0,1,1,0,9,7,3,0,1,1	3,6
14	0,0,0,0,0,5,5,4,8,6,5,0,5,6	8,1
15	0,0,0,0,0,2,7,7,4,3,2,5,2,8,4	0,9
16	0,0,0,0,0,1,3,8,7,1,6,2,6,4,2,0	4,5
17	0,0,0,0,0,0,6,9,3,5,8,1,3,2,1,0,2	2,7
18	0,0,0,0,0,0,3,4,6,7,9,0,6,6,0,5,1,1	3,6
19	0,0,0,0,0,0,1,7,3,3,9,5,3,3,0,2,5,5,6	8,1
20	0,0,0,0,0,0,0,8,6,6,9,7,6,6,5,1,2,7,8,4	0,9

5. 考察

髭を式で表す。分母が $2^r \times 3$ のとき.

r が偶数のとき. 3節の結果を見ると $\frac{1}{2^r \times 3}$ の循環節部分は $\frac{1}{3 \times 10^r}$ になるので、髭は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^r \times 3} \\ &= \frac{1}{10^r \times 3} + \text{hige} \\ \text{hige} &= \frac{1}{2^r \times 3} - \frac{1}{3 \times 10^r} \\ &= \frac{1}{10^r \times 3} (5^r - 1) \end{aligned}$$

rが2N のとき

$$\begin{aligned}5^r - 1 &= 5^{2N} - 1 = (-5)^{2N} - 1 \\ &= -6(1 + \dots + (-5)^{2N-1}) \\ S &= -(1 + \dots + (-5)^{2N-1})\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}5^r - 1 &= 6S \\ \text{hige} &= \frac{1}{10^r} \times 2(1 + (-5) + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{r-1})\end{aligned}$$

r が奇数のとき. 同様に 3 節の結果を見ると $\frac{1}{2^r \times 3}$ の循環節部分は $\frac{2}{3 \times 10^r}$ になるので、
髭は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^r \times 3} &= \frac{2}{3 \times 10^r} + \text{hige} \\ \text{hige} &= \frac{1}{2^r \times 3} - \frac{2}{3 \times 10^r} \\ &= \frac{1}{3 \times 10^r} (5^r - 2)\end{aligned}$$

r が $2N - 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 5^r - 2 &= 5^{2N-1} - 2 \\
 &= 5(5^{2N-2} - 1) + 3 \\
 &= 5(-5)^{2N-2} - 1 + 3 \\
 &= 5(-5 - 1)(1 + \dots + 5^{2N-3}) + 3 \\
 &= \frac{1}{3 \times 10^r} - 30(1 + \dots + (-5)^{r-2}) + 3 \\
 \text{hige} &= \frac{1}{10^r} \times -10(1 + \dots + (-5)^{r-2}) + 1
 \end{aligned}$$

r	髭	循環節
1	0	4,5
2	0,2	2,7
3	0,1,1	3,6
4	0,0,5,6	8,1
5	0,0,2,8,4	0,9
6	0,0,1,4,2,0	4,5
7	0,0,0,7,1,0,2	2,7
8	0,0,0,3,5,5,1,1	3,6
9	0,0,0,1,7,7,5,5,6	8,1
10	0,0,0,0,8,8,7,7,8,4	0,9

分母が $2^r \times 11$ のとき.

髭を式で表す。分母が $2^r \times 11$ のとき.

$$\frac{1}{2^r \times 11}$$

のときは表からみると,循環節が

(4.5),(2.7),(3.6),(8.1),(0.9)と分かれているので

分けて考える。

パターン 1. 循環節は45

$$r = 5N - 4 (N = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^r \times 11} &= \frac{5}{11 \times 10^r} + \text{hige} \\ \text{hige} &= -\frac{1}{2^r \times 11} + \frac{5}{11 \times 10^r} = \frac{1}{11 \times 10^r} (5^r - 5) \\ &= \frac{1}{11 \times 10^r} (5^r - 5) \end{aligned}$$

$$r = 5N - 4$$

$$r - 1 = 5(N - 1)$$

とする。

$$5^{r-1} - 1 = 5^{5(N-1)} - 1$$
$$X = 5^5$$

とすると。

$$5^{r-1} - 1 = X^{N-1} - 1$$
$$= (X - 1)(1 + X + X^2 + X^3 + \dots + X^{N-2})$$
$$= 11 \times 284 \times (1 + X + X^2 + X^3 + \dots + X^{N-2})$$
$$\text{hige} = \frac{1}{10^r} \times 1420 \times (1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10})$$

r	髭
6	001420
11	00004438920

パターン 2 . 循環節は27

$$r = 5N - 3(N = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると

$$\frac{1}{2^r \times 11} = \frac{3}{11 \times 10^r} + \text{hige}$$
$$\text{hige} = \frac{1}{2^r \times 11} - \frac{3}{11 \times 10^r} = \frac{1}{11 \times 2^r} (5^r - 3)$$

$$r = 5N - 3$$

$$r - 2 = 5(N - 1)$$

とする。

$$V = 5^{5N-3} - 3$$

これが11で割れることを証明する。

$$V = 22 = 5^2 - 3$$

$$3 = 5^2 - 22$$

$$V = 5^{5N-3} - (5^2 - 22)$$

$$X = 5^5$$

とすると

$$= 11 \cdot 25^h \times 284 \times (1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 2^i$$
$$\text{hige} = \frac{1}{10^r} \times 7100(1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 2$$

r	髭
7	0007102
12	000022194602

パターン 3. 循環節は36

$$r = 5N - 2 (N = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると

$$\frac{1}{2^r \times 11} = \frac{4}{11 \times 10^r} + \text{hige}$$
$$\text{hige} = \frac{1}{2^r \times 11} - \frac{4}{11 \times 10^r} = \frac{1}{11 \times 10^r} (5^r - 4)$$

$$r = 5N - 2$$

$$r - 3 = 5(N - 1)$$

とする。

$$V = 5^{5N-2} - 4$$

これが11で割れることを証明する。

$$V = 121 = 5^3 - 4$$

$$4 = 5^3 - 121$$

$$V = 5^{5N-2} - (5^3 - 121)$$

$$X = 5^5$$

とすると

$$= 11^h \cdot 125 \times 284 \times (1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 11^i$$

$$\text{hige} = \frac{1}{10^r} \times 35500((1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 11$$

r	髭
8	00035511
13	0000110973011

パターン 4 . 循環節は81

$$r = 5N - 1 (N = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると

$$\frac{1}{2^r \times 11} = \frac{9}{11 \times 10^r} + \text{hige}$$
$$\text{hige} = \frac{1}{2^r \times 11} - \frac{9}{11 \times 10^r} = \frac{1}{11 \times 10^r} (5^r - 9)$$

$$r = 5N - 1$$

$$r - 4 = 5(N - 1)$$

とする。

$$V = 5^{5N-1} - 9$$

これが11で割れることを証明する。

$$V = 616 = 5^4 - 9$$

$$9 = 5^4 - 616$$

$$V = 5^{5N-1} - (5^4 - 616)$$

$$X = 5^5$$

とすると

$$= 11 \overset{h}{625} \times 284 \times (1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 56 \overset{i}$$

$$\text{hige} = \frac{1}{10^r} \times 177500((1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 56)$$

r	髭
9	000177556
14	00000554865056

パターン 5 . 循環節は09

$$r = 5N (N = 1, 2, 3, \dots)$$

とするとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^r \times 11} &= \frac{1}{11 \times 10^r} + \text{hige} \\ \text{hige} &= \frac{1}{2^r \times 11} - \frac{1}{11 \times 10^r} = \frac{1}{11 \times 10^r} (5^r - 1) \end{aligned}$$

$$r = 5N$$

$$r - 5 = 5(N - 1)$$

とする

$$V = 5^{5N} - 1$$

これが11で割れることを証明する。

$$V = 3125 = 5^5 - 1$$

$$1 = 5^5 - 3125$$

$$V = 5^{5N} - (5^5 - 3125)$$

$$X = 5^5$$

とすると

$$= 11^h \cdot 3125 \times 284 \times (1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 284^i$$
$$\text{hige} = \frac{1}{10^r} \times 887500((1 + 5^5 + 5^{10} + 5^{15} + \dots + 5^{5N-10}) + 284$$

r	髭
10	0000887784
15	000002774325284

髭の公式をつかうことにより、髭の性質が分かった。