新世代完全数 part 2'

飯高 茂

2024 年 1 月 2 日

1　完全数から始めよう

完全数から始めよう.

6 の約数は 1,2,3,6 だが 6 は当たり前の約数なのでこれを除外すると真の約数は 1,2,3. これらを足すと 6 が出る.

約数という概念は掛け算の世界のモノである. それらを加えると 6 が再現することは不思議な気がする.

自然数 a の約数の和をギリシャ文字を使って $\sigma(a)$ と書く. 約数の和という.

a の約数には a 自身を含めるので $\sigma(6)=1+2+3+6=12=2a$.

このような数すなわち $\sigma(a)=2a$ を満たす a を完全数 (perfect numbers) と呼ぶ.

これらは古代世界で珍重されていた.

紀元前 300 年以上前の時代に 6,28,496,8128 が完全数であることが分かった.

28 が完全数であることは容易にわかるが, 496,8128 が完全数になることを確認することはそれほど簡単なことではない. 紀元前にこれらが発見されたことは驚きである.

数学の始祖ともいえるエウクレイデス (ユークリッド) は組織的に完全数をつくることを考えた.

1 から始め 2　倍して 2.　それを 2 倍し て 4 , この操作を続けると $8, 16\cdots, 2^e$. かくして出てきた数をすべて加えると数 $N=1+2+4+8+\cdots+2^e$ を得る. N が素数となったとき, $a=2^eN$ は完全数になる.

これが最古の, 偉大な数学書 (BC370 年頃) である原論 (ストイケイア) に記載された結論である.

彼らは $1+2+4+8+16\cdots+2^e=N=2^{e+1}-1$ を当然のこととして知っていたのだ.

$\sigma(2^e)=2^{e+1}-1$ は高校生ならよく知っている公比 2 の等比数列の和の公式の帰結である.

2　ユークリッドはなぜこの式を考えたのか

ユークリッドは $6 = 2 * 3, 28 = 2^2 * 7, 496 = 2^4 * 31$ という結果から $a = 2^e Q, (Q$: 奇素数) という解が 完全数となると推測した.

$a = 2^e Q$ が $\sigma(a) = 2a$ を満たすとしよう.$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $2^e, Q$ は互いに素で $\sigma(2^e) = N, \sigma(Q) = Q + 1$ なので

$\sigma(2^e Q) = \sigma(2^e)\sigma(Q) = N(Q + 1) = NQ + N.$

$NQ = 2 * 2^e Q - Q = 2a - Q$ によって,

$\sigma(a) = \sigma(2^e Q) = 2a - Q + N$. これが完全数の定義式 $\sigma(a) = 2a$ を満たすと仮定すると $N - Q = 0; Q = N$

ゆえに $N = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^e$ は素数.

3　平行移動 m の完全数

ここでは少し一般にして整数 m について, $p = 2^{e+1} - 1 + m$ が自然数でかつ素数とするとき $a = 2^e p$ は $\sigma(a) = 2a - m$ を満たすことを以下で示す.

命題 1 $p = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e p$ は $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす.

Proof

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき, $\sigma(2^e) = N$ であり, 仮定から $p = N + m$.

$\sigma(a) = \sigma(2^e)(p + 1) = Np + N$.

定義によると, $N + 1 = 2^{e+1} = 2a/p$ なので, $2a = (N + 1)p = Np + p = Np + N - N + p = \sigma(a) + m$ となる.

よって $2a = \sigma(a) + m$. ゆえに　$\sigma(a) = 2a - m$.

q.e.d.

一般に $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす自然数 a を平行移動 m の完全数という.

$p = 2^{e+1} - 1 + m = N + m, a = 2^e p$　によって作られた数 a を平行移動 m のユークリッドの完全数という .

先の命題は 平行移動 m のユークリッド完全数は 平行移動 m の完全数になることを意味する.

私はこの考え方を使って完全数の一般化を試みることにした.

BC 600 年頃の人 ターレスは, 偶数, 奇数, 素数の概念を導入した.

2 べきの数 $2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, \cdots$ もかれらにとって馴染み深い種類の数であったろう.

2 べきの数 のユークリッド関数が素数と結びついて完全数ができる.

4　φ^2 完全数の定義

中学生の齋藤之理さんが新しい完全数を思いついた．これはなかなかの優れモノであった．そこで私も詳しく調べてみたら意外に詳しい結果がでたのである．

底 $p = 2$ の場合.

h を奇素数とし　乗数という．m を整数としで平行移動のパラメータという．

$A = 2^{e+1}h - 1 + m$ を素数と仮定する．

$\alpha = 2^e A$ はユークリッドの完全数の一般化であるとみなせる．

オイラー関数 $\varphi(\alpha)$ を用いて $2\varphi(\alpha) = 2^e(A-1) = \alpha - 2^e$.

ここで $X = 2^e$ とおくと,$A = 2^{e+1}h - 1 + m = 2hX - 1 + m$.

$2\varphi(\alpha) = \alpha - X$. ゆえに $X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$.

したがって $\alpha = 2^e A = X(2hX - 1 + m)$ をえる．

そこで一般に次の定義を行う．

定義 1 $X = \alpha - 2\varphi(\alpha), \alpha = X(2hX - 1 + m)$ を満たす α を齋藤の φ^2 完全数, X をそのパートナーという．

表 1: Saito $\varphi(a)^2$ 完全数,$h = 1, m = 0, 2, -12; p = 2$

a	素因数分解				
$m = 0$		$m = 2$		$m = -12$	
3	3	10	$2 * 5$	15	$3 * 5$
6	$2 * 3$	136	$2^3 * 17$	24	$2^3 * 3$
21	$3 * 7$	32896	$2^7 * 257$	304	$2^4 * 19$
28	$2^2 * 7$	2147516416	$2^{15} * 65537$	2535	$3 * 5 * 13^2$
465	$3 * 5 * 31$			127744	$2^8 * 499$
496	$2^4 * 31$			33501184	$2^{12} * 8179$
8128	$2^6 * 127$			8589082624	$2^{16} * 131059$

$m = 0$ のとき古典的完全数 6,28,496,8128,33550336 などの解がでている．

奇数解 $3, 21 = 3 * 7, 465 = 3 * 5 * 31$ もでている．ここで,3,5 はフェルマ素数, 7,31 はメルセンヌ素数.

$m = -12$ のとき 通常の完全数に出てきた $6Q$ の形の解（Q: 3 以外の素数) はないが $2^e Q, (Q = 2^{e+1} - 13))$ は A 型解で全部でている．

ここでも奇数解が 2 個あり最初の 2 つの素因数はフェルマ素数.

また, 偶数解にユークリッドの完全数以外の解があるか, どのくらいあるか, などが思い浮かぶ課題である．

4.1 第 4 の奇数解

$h=1, m=0$ のとき齋藤之理は第 4 の奇数解を発見した.

$w = 3*5*17*257 = 2^{16}-1$ は容易に確認できる.

これの素因子はフェルマ素数. さらに $v = 131071 = 2^{17}-1$ はメルセンヌ素数で $v-1 = 2(2^{16}-1) = 2w; v = 2w+1$ を満たす.

命題 2 $\alpha = wv$ が奇数の解

ここで得られた奇数解はフェルマー素数の積にメルセンヌ素数を掛けた形である. 本当に美しい構造をもっているので思わず感動した.

5 準 A 型解

一般に $\alpha = 2^e Q^\varepsilon, (\varepsilon > 1)$ と書ける解を準 A 型解という.

このとき $X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 2^e Q^{\varepsilon-1}$.

ゆえに, $\alpha = X(2hX+m-1)$ によって, $Q = 2hX+m-1 = 2^{e+1}hQ^{\varepsilon-1}+m-1$.

かくて 次の簡単な式 $(2^{e+1}hQ^{\varepsilon-2}-1)Q = 1-m$ を得る.

$\varepsilon = 2$ のとき, $(2^{e+1}h-1)Q = 1-m$ となる.

たとえば, $h=1, e=1, m=-56$ なら $Q=19$, $h=1, e=1, m=-2*496$ なら $Q=331$.

6 基本定理

次の結果はかっては予想であったがいまや定理になった. ここで $\mathrm{co}\varphi(a) = a-\varphi(a)$ と定義されオイラー余関数という.

定理 1 *3*より大きい自然数 a について $\mathrm{co}\varphi(a)$ が a の約数なら a は素数べき.

偶数解 α を奇数 L を用いて 2^eL と書くとき $X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 2^e\mathrm{co}\varphi(L)$. ここで $\mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L)$.

$d = \mathrm{co}\varphi(L)$ とおくと, $X = 2^e d$, $2^e L = \alpha = X(2hX+(m-1)) = 2^e d(2^{e+1}hd + (m-1))$.

ゆえに $\delta = hd2^{e+1}+m-1$ とおけば $L = d\delta$. $d = \mathrm{co}\varphi(L)$ が L の約数なので定理 1 を使うと L は素数べき. よって $L = Q^\varepsilon$; $d = \mathrm{co}\varphi(L) = \mathrm{co}\varphi(Q^\varepsilon) = Q^{\varepsilon-1}$.

$\delta = h2^{e+1}Q^{\varepsilon-1}+m-1$. $Q^\varepsilon = L = d\delta$ により,$\delta = Q$. ゆえに

$$Q = h2^{e+1}Q^{\varepsilon-1}+m-1.$$

とくに,$\varepsilon=1$ のときは, $d=1, Q=h2^{e+1}+m-1; \alpha=2^eQ$. これはA 型解で完全数の定義に戻る . そこで先祖返りの場合になる.

$\varepsilon=2$ ならば $Q=\delta=h2^{e+1}Q+m-1$.

ゆえに $1-m=\delta=(h2^{e+1}-1)Q$.

7 奇数解の場合

奇数解の場合はいろいろあってまとまりがつかない. しかしさらに研究をすれば興味深いものとなるだろう.

数値例をあげる. これらから解の構造を探してみよう.

表 2: φ^2 奇数完全数 α, X をそのパートナ; $h=1$

α	素因数分解	X	素因数分解
855	3^2*5*19	-9	-3^2
1815	$3*5*11^2$	55	$5*11$
855	3^2*5*19	-9	-3^2
$m=-64$			
1425	$3*5^2*19$	-15	$-3*5$
$m=-56$			
1485	3^3*5*11	45	3^2*5
$m=-40$			
2565	3^3*5*19	-27	-3^3
$m=-36$			
15939	$3^2*7*11*23$	99	3^2*11
$m=-24$			
2925	3^2*5^2*13	45	3^2*5
$m=-16$			
825	$3*5^2*11$	25	5^2
10573065	3^3*5*17^2*271	-2295	3^3*5^{17}
$m=-12$			
15	$3*5$	-1	-1
2535	$3*5*13^2$	39	$3*13$
$m=-8$			
45	3^2*5	-3	-3
$m=-4$			
75	$3*5^2$	-5	-5
4275	3^2*5^2*19	-45	-3^2*5
31875	$3*5^4*17$	-125	-5^3
1174275	$3^2*5^2*17*307$	-765	$3^2*5*1]$

表 3: φ^2 奇数完全数 α, X をそのパートナ; $h=1$

$m=0$	素因数分解		素因数分解
21	$3*7$	-3	-3
465	$3*5*31$	-15	$-3*5$
m= 4			
9	3^2	-3	-3
135	3^3*5	-9	-3^2
495	3^2*5*11	15	$3*5$
$m=12$			
63	3^2*7	-9	-3^2
1755	3^3*5*13	27	3^3
$m=16$			
27	3^3	-9	-3^2
225	3^2*5^2	-15	$-3*5$
34425	3^4*5^2*17	-135	-3^3*5
m= 20			
5415	$3*5*19^2$	-57	$-3*19$
m= 24			
165	$3*5*11$	5	5
m= 36			
147	$3*7^2$	-21	$-3*7$
375	$3*5^3$	-25	-5^2
975	$3*5^2*13$	15	$3*5$
m= 40			
405	3^4*5	-27	-3^3
m= 48			
189	3^3*7	-27	-3^3
585	3^2*5*13	9	3^2
m= 52			
81	3^4	-27	-3^3
39015	3^3*5*17^2	-153	-3^2*17
m= 56			
7125	$3*5^3*19$	-75	$-3*5^2$
m= 60			
195	$3*5*13$	3	3
1395	3^2*5*31	-45	-3^2*5

表 4: φ^2 奇数完全数 α, X をそのパートナ $h=3$

$m=-96$			
1755	3^3*5*13	27	3^3
$m=-92$			
6885	3^4*5*17	-27	-3^3
$m=-76$			
285	$3*5*19$	-3	-3
$m=-56$			
495	3^2*5*11	15	$3*5$
$m=-40$			
855	3^2*5*19	-9	-3^2
$m=-36$			
5313	$3*7*11*23$	33	$3*11$
$m=-24$			
975	$3*5^2*13$	15	$3*5$
$m=-8$			
15	$3*5$	-1	-1
$m=-4$			
1425	$3*5^2*19$	-15	$-3*5$

以上の諸例から次の予想を建てる.
1. 奇数完全数は 3 で割れる.
次の問題はやさしい.
2. 奇数完全数 3 はいつ起こるか.
$(-m=2-2h$ により $h=3$ なら $m=-4)$
一般に奇数解の構造をおおまかに論じることにする.

8 素数べきの場合

奇数解が 素数べきとしよう. $\alpha\quad = Q^e$ とすると,
$\varphi(\alpha)=Q^{e-1}(Q-1)$. $X=\alpha-2\varphi(\alpha)=Q^{e-1}(2-Q)$
定義式より $\alpha=XY, (Y=2Xh+m-1)$. よって, $Q=(2-Q)Y$. Q は素数なので, $Q=3; Y=-3$.
$X=-3^{e-1}$, $3=-Y=-2hX-m+1.m=2h3^{e-1}-2$. 例えば $e=3$ なら $m=18h-2$. $h=3$ なら $m=52$ の例

9 $h=1, \alpha=3^e*Q, (Q:$ 素数$)$ の場合

$X=3^{e-1}(4-Q)$. $R=4-Q$ とおけば, $X=3^{e-1}R$.

$\alpha=3^e*Q=XY=3^{e-1}RY, Y=2hX+m-1$ によって,$3^e*Q=XY=3^{e-1}RY; 3Q=3(4-R)=RY$.

ゆえに $12=R(2h*3^{e-1}R+m+2)$.

$R=\pm 3$. $R=3$ のとき $Q=1$. これはおきないので, $R=-3; Q=7$.

$-4=-2h3^e+m+2$. ゆえに $-6+6h(3^{e-1})=m$. $m=0$ なら ,$h=e=1$.

10 $h=1, \alpha=3^2*5*Q, (Q:$ 素数$)$ の場合

$h=1, \alpha=3^2*5*Q, (Q:$ 素数$)$ を仮定して Q を決定することを考えてみよう.

$2\varphi(\alpha)=48(Q-1)$ なので $X=3(16-Q)$. $X=3(16-Q)$. $R=16-Q$ おけば $X=3R$, 定義式$\alpha=X(2X+m-1)$ において, $15Q=R(6R+m-1)$.

α は奇数なので, $X, m-1$ はともに奇数.m は偶数; $m=2\mu$.

$15*16=6R^2+(2\mu+14)R=R(6R+2\mu+14)$.

ゆえに, $15*8=3R^2+(\mu+7)R=R(3R+\mu+7)$.

Q は奇数なので $R=16-Q$ は奇数. かつ 15*8 の約数なのでつぎの場合が残る.(マイナスの場合も忘れない)

i.$R=5, Q=16-R=11$; これの解は $R=5, m=4$. よって $Q=11$.

ii.$R=-3, Q=16-R=19$; $\mu=-38, m=-76$

iii.$R=-15, Q=16-R=31$; $m=60$

以上 2 つの解は上の表にでている. このような一致はうれしい. しかしこれは抜けている場合があった.

iv.$R=-1, Q=16-R=17$; $120=15*8=R(3R+\mu+7)=-(7-3)-\mu$. $m=-248$. この解は当時小学 6 年の但見東君による.

11 $\alpha=3^e*5^f$ の場合

$U=3^{e-1}*5^{f-1}, V=15$ を使うと $\alpha=3^e*5^f=15U$.

$2\varphi(\alpha)=16U$ により

$X=\alpha-2\varphi(\alpha)=-U$.

$Y=2hX+m-1$ とおくとき, $Y=2hX+m-1=-2hU+m-1$. 定義式 $\alpha=XY$ によって

$$15U=-U(-2hU+m-1).$$

$$14=2hU-m.$$

$U=3^{e-1}*5^{f-1}$ において, $e=f=2$ と仮定すれば $U=15$.
具体例を求めるため $14=30h-m$. $h=3$ とおくと, $m=76$.
$h=3, m=76$ のときパソコンで求めると $\alpha=225=3^2*5^2$.

12 $\alpha=3^e*5^f*Q$ の場合

$U=3^{e-1}*5^{f-1}, V=15, W=16$ を使うと $\alpha=3^e*5^f*Q=15UQ$.
$2\varphi(\alpha)=W*U*(Q-1)$ により
$X=\alpha-2\varphi(\alpha)=U(W-Q)=UR$. ここで $R=W-Q$ とした.
$Y=2hX+m-1$ とおくとき, $Y=2hX+m-1=2hUR+m-1$. 定義式 $\alpha=XY$ によって

$$15Q=RY.$$

$Q=W-R$ により

$$15*16=R(15+Y)=R(h2UR+14+m).$$

R は奇数なので, $R=\pm3,\pm5,\pm15$ が起こりうる.
以下では $e=f=2, h=1$ の場合を扱う.
$U=15$ なので $15*16=R(30R+14+m)$.
i. $R=3$. $Q=16-3=13$. $80=2U*3+m+14=m+104$; $m=-24$.
ii. $R=-3$. $Q=16+3=19$. $80=-(-90+14+m)=90-14-m$; $m=-4$.
iii. $R=5$. $Q=16-5=11$. $3*16=30*5+14+m=164+m; m=-116$.
iii*. $R=-5$ なら $Q=21$:素数にならない/
iii**. $R=15$. $Q=16-15=1$. 矛盾.
iv. $R=-15$. $Q=16+15=31$. $15*16=-15(-15*30+14+m)$. $m=420$.

13 $h=1, \alpha=3^e*5^f*17^g*Q(Q:$ 素数$)$ の場合

$U=3^{e-1}*5^{f-1}17^{g-1}, V=3*5*17=255, W=256=16^2$ を使うと $\alpha=3^e*5^f*17^g*Q=UVQ$.
$2\varphi(\alpha)=W*U*(Q-1)$ により $X=\alpha-2\varphi(\alpha)=U(W-Q)=UR$. ここで $R=W-Q$.
$Y=2hX+m-1$ とおくとき,$Y=2hUR+m-1$. 定義式 $\alpha=XY$ によって

$$\alpha=UVQ=URY=UR(2hUR+m-1).$$

$Q=W-R$ により

$$V * W = R(V+Y) = R(2hUR + V - 1 + m).$$

R は奇数なので, $R = -1, \pm 3, \pm 5, \pm 17, \pm 3*5, \pm 3*17, \pm 5*17, \pm 3*5*17,$ が起こりうる. 以下 $h=1$.

$R = 5*17$ なら $Q = 256 - 85 = 171 = 3^2 * 19$:不適

$R = -5*17$ なら $Q = 256 + 85 = 341 = 11 * 31$:不適

$R = 3*17$ なら $Q = 256 - 51 = 205$:不適

$R = -3*17$ なら $Q = 256 + 51 = 307$:素数.

$$5 * 256 = R(255 + Y) = -(-51 * 2U + 254 + m).$$

$m = 51 * 2U - 254 - 5 * 256$ $m = -1432$.

$R = -1$ と仮定する.$X = UR = -1$. $Q = W + 1 = 16^2 + 1 = 257$. これは偶然にもフェルマ素数.

$\alpha = V * Q = (W-1)*(W+1) = 65535 = R(2UR + V - 1 + m) = -(-2 + V + m - 1) = 3 - m$. よって, $W^2 - 1 = 3 - m$.

$m = 4 - W^2 = 4 - 65536$.

表 5: φ^2 完全数 α, X をそのパートナ; $h = 1, m = 4 - 65536$

α	素因数分解	X	素因数分解
65535	$3*5*17*257$	-1	-1
98304	$2^{15}*3$	32768	2^{15}

14 $h = 1, \alpha = 3^e * 5^f * 17^g * 257^t * Q(Q:$ 素数$)$ の場合

$U = 3^{e-1} * 5^{f-1} * 17^{g-1} * 257^{t-1}, V = 3*5*17*257 = 16^4 - 1 = W - 1, W = 16^4 = 65536 = V + 1$ を使うと $\alpha = 3^e * 5^f * 17^g * 257^t * Q = UVQ$.

$2\varphi(\alpha) = WU * (Q-1)$ により

$X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = U(W - Q) = UR$. ここで $R = 16^4 - Q = W - Q$.

$Y = 2hX + m - 1$ とおくとき,$Y = 2hUR + m - 1$. 定義式 $\alpha = XY$ によって

$$\alpha = UVQ = URY = UR(2hUR + m - 1).$$

$Q = W - R$ により $VQ = V(W - R) = R(2hUR + m - 1)$.

$$V * W = R(2hUR + V - 1 + m).$$

R は奇数なので, $R = \pm 3, \pm 5, \pm 17, \pm 3*5, \pm 3*17, \pm 5*17, \pm 3*5*17, \pm 3*5*17*257(=65535)$ が起こりうる.

以下 $h=e=f=g=t=1$ を仮定する.$U=1.W=V-1$.

i.

$R=-3*5*17*257=-65535=-W-1$ と仮定する. $Q=W-R=2W-1=2^{17}-1=131071$. これは偶然にもメルセンヌ素数.

$V*W=V(V+1)=R(2UR+V-1+m)=-V(-V+m-1)=V(V+1-m)$. よって, $m=0$.

$m=0$ での解は $3*5*17*257*131071$. これが齋藤之理の第 4 の奇数完全数.

ii. $R=-1$ と仮定する.$X=UR=-1$. $Q=W+1=16^4+1=265537$. これは偶然にもフェルマ素数.

$\alpha = V*Q = (W-1)*(W+1) = W^2-1 = R(2UR+V-1+m) = -(-2+V+m-1) = 3-m$. よって, $W^2-1=3-m$. ; $m=4-W^2$.

表 6: φ^2 奇数完全数 α, X をそのパートナ; $h=1$

$m=52, h=3$ α	素因数分解 素因数分解	 X	素因数分解 素因数分解
13005	3^2*5*17^2	-51	$-3*17$
$h=1, m=420$			
6975	3^2*5^2*31	-225	-3^2*5^2
35008	2^6*547	64	2^6
$h=1, m=-116$			
704	2^6*11	64	2^6
2475	3^2*5^2*11	75	$3*5^2$
17792	2^7*139	128	2^7
$h=1, m=-1432$			
78285	$3*5*17*307$	-51	$-3*17$

15 $h=1, \alpha = 3^e*5^f*17^g*257^t*65537^u*Q(Q:$ 素数$)$ の場合

$U=3^{e-1}*5^{f-1}*17^{g-1}*257^{t-1}*65537^{u-1}, W=16^8, V=3*5*17*257*65537=W-1$ を使うと $\alpha = 3^e*5^f*17^g*257^t*Q=UVQ$.

$2\varphi(\alpha)=WU*(Q-1)$ により

$X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = U(W-Q) = UR$. ここで $R = W - Q = 2^{32} - Q$.
$Y = 2hX + m - 1$ とおくとき,$Y = 2hUR + m - 1$. 定義式 $\alpha = XY$ によって

$$\alpha = UVQ = URY = UR(2hUR + m - 1).$$

$Q = W - R$ により

$$V * Q = R(2hUR + W - 1 + m).$$

R は奇数なので, $R = \pm 3, \pm 5, \pm 17, \pm 3 * 5, \pm 3 * 17, \pm 5 * 17, \pm 3 * 5 * 17, \cdots$ が起こりうる.

$R = -V$ とおくと　$Q = W - R = W + V = 2W - 1 = 2^{33} - 1$ は素数ではない.

16　特異解

以上では多くの奇数解がフェルマ素数 3,5,17,257,65537 に関連している.

$\alpha = 3^e * 7 * 11 * 23$ とおくと,

$2\varphi(\alpha) = 3^{e-1} * 4 * 6 * 10$ により, $X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 3^e * 11$.

$Y = 2Xh + m - 1 = 3^e * 22 * h + m - 1$ により$\alpha - XY = 0$ により $7 * 23 = 3^e * 22 * h + m - 1$.

i $h = 1, e = 2$ のとき $\alpha = 3^2 * 7 * 11 * 23$ は $m = -36$ に対応する.

ii. $h = 3, e = 1$ のとき $\alpha = 3 * 7 * 11 * 23$ は $m = -36$.

このようにフェルマ素数と遠く離れた解もある. これらを特異解という. この他にあるに違いないと思案したくなりいつかはそのような不思議な解を見つけたいと新年である 2024 年 1 月 2 日に考えている.

表 7: φ^2 奇数完全数 α, X をそのパートナ; $h=1$

$m=52, h=3$	素因数分解		素因数分解
α	素因数分解	X	素因数分解
13005	$3^2 * 5 * 17^2$	-51	$-3 * 17$
$h=1, m=420$			
6975	$3^2 * 5^2 * 31$	-225	$-3^2 * 5^2$
35008	$2^6 * 547$	64	2^6
$h=1, m=-116$			
704	$2^6 * 11$	64	2^6
2475	$3^2 * 5^2 * 11$	75	$3 * 5^2$
17792	$2^7 * 139$	128	2^7
$h=1, m=-1432$			
78285	$3 * 5 * 17 * 307$	-51	$-3 * 17$