変異完全数の発見

飯高 茂

2022 年 9 月 14 日

1　前書き

完全数は西暦前 370 年より始まる長い研究の歴史を持ち, 繰り返しその一般化や類似物が作られ研究されて来た. 奇数の完全数問題など未解決の課題も多い.

ここでは, ベースと乗数, さらに平行移動を含めた完全数の一般化を行う.

約数の和関数 $\sigma(a)$ のほかにオイラー関数も動員するので定義式は複雑になり, 3 項完全数とでもいうべきものになった.

定数 k の素数倍 kp がありしかも, p が複数個あるという条件をつけることによってやはり複雑ではあるが $P=2$ でしかも豊富な解をもつ新しい完全数が定義されこれは過剰度 12 の過剰数が多くある場合の一般化になる点で興味をそそる.

h を奇素数または 1 とし, m を平行移動のパラメータとすればその定義式は

$$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2(2-h)\alpha-m.$$

$h=1$ のとき, $\sigma(\alpha)=2\alpha-m$ となる. この解は平行移動 m の完全数と呼ばれる.

h は奇素数であり, $h=3$ なら $\sigma(\alpha)-8\varphi(\alpha)=-3\alpha-m$.

これは豊富な興味深い解を持つ点で優れた性質を持つ.

古典的な平行移動 m の完全数は $h=1$ の場合だが, $h>2$ の場合はさらに豊富な例を産出する.

2022 年 7 月の今日現在もコロナ感染症は収束に至らないのは残念至極であるがここで定義された新しい 3 項完全数は古典的完全数の変異とも見なしうると想念し, 変異完全数と命名することにした.

2 abundance

自然数 n , 約数の和 $\sigma(n)$ について $I(n)=\sigma(n)-2n$ を abundance(過剰度) という.

奇数の k について, $I(n)=k$ を満たす n は少ないが複数個の解 n がある場合を齋藤之理 (中学 1 年生) は求めた. 例えば, $k=199$ のとき, 2 個の解 $n=324,784$ がある.

$I(n)=0$ を満たす場合 n は完全数であって, $\sigma(2^e)=p$ が素数の時, $\alpha=2^e p$ は完全数になることは, ユークリッドの知るところであった.

齋藤之理は n の約数の和 $\sigma(n)$ が素数 p になる場合を 10 億以下の場合に決定した. このとき $\alpha=np$ はユークリッドの完全数の一般化になる.

そこで, α の満たす方程式を作りその解を求め, とくに A 型解なるものを研究する.

$\sigma(n)$ が素数 p になる場合 n は素数べきになる. これを基に完全数の一般化を試みる.

P を素数としこれを固定してベースと考える.

$a=P^e$ について, $\overline{P}=P-1$ とおくとき等比数列の和の公式より $\overline{P}\sigma(a)=P^{e+1}-1=aP-1$ が成り立つ.(ここで, $\overline{P}=P-1$)

$L=\sigma(a)=\dfrac{aP-1}{\overline{P}}$ が素数のとき $\alpha=aL$ はユークリッドの完全数の一般化である.

さらに一般化するため, 次のように乗数と平行移動を考えてその定義方程式を作る.

3　完全数の一般化

$a = P^e$ について, $\overline{P} = P - 1$ とおくとき等比数列の和の公式より $\overline{P}\sigma(a) = P^{e+1} - 1 = aP - 1$ が成り立つ.

m を平行移動のパラメータ, $h(\neq P)$ を別の奇素数としこれを乗数と見て

$A = \dfrac{hP^{e+1} - 1}{\overline{P}} + m$ は素数と仮定する.

$A = \dfrac{haP - 1}{\overline{P}} + m = \dfrac{h(\overline{P}\sigma(a) + 1) - 1}{\overline{P}} + m$ より,

$\overline{P}(A - m) = haP - 1$ から $haP = \overline{P}(A - m) + 1$ をえる.

$\overline{h} = h - 1$ を使うと

$$\overline{P}(A - m) = h\overline{P}\sigma(a) + \overline{h}.$$

A は素数であることに注目し, $\alpha = aA$ とおき, これの満たす方程式を次のように作る.

$\sigma(\alpha) = \sigma(a)(A + 1)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} h\overline{P}\sigma(\alpha) &= h\overline{P}\sigma(a)(A + 1) \\ &= h(aP - 1)(A + 1) \\ &= h(\alpha P - A) + haP - h \end{aligned}$$

$haP = \overline{P}(A - m) + 1$ を使うと,

$$h\overline{P}\sigma(\alpha) = h(\alpha P - A) - h + \overline{P}(A - m) + 1 = h\alpha P - hA - \overline{h} + \overline{P}A - \overline{P}m$$

かくて,

$$h\overline{P}\sigma(\alpha) = h\alpha P + A(\overline{P} - h) - \overline{h} - \overline{P}m.$$

例えば $P = 2, h = 1$ なら $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$.

4　オイラー関数

Maxp(α) を使う代わりにオイラー関数を用いることにして新たな完全数を定義してみよう.

はじめに $\alpha = aA$ のオイラー関数を求める.

$\varphi(\alpha) = \varphi(a)(A-1)$ に P を乗じて $P\varphi(\alpha) = P\varphi(a)(A-1)$.

$P\varphi(a) = P^e\overline{P} = a\overline{P}$ を代入すると,

$$P\varphi(\alpha) = P\varphi(a)(A-1) = \overline{P}a(A-1) = \overline{P}\alpha - \overline{P}a.$$

さらに hP を乗じて

$$hP^2\varphi(\alpha) = hP\overline{P}\alpha - \overline{P}hPa.$$

$haP = \overline{P}(A-m)+1$ を使うと,

$$\begin{aligned} hP^2\varphi(\alpha) \quad &= hP\overline{P}\alpha - \overline{P}(\overline{P}(A-m)+1) \\ &= hP\overline{P}\alpha - \overline{P}^2(A-m) - \overline{P} \\ &= hP\overline{P}\alpha - \overline{P}^2A + m\overline{P}^2 - \overline{P}. \end{aligned}$$

これより

$$hP^2\varphi(\alpha) = hP\overline{P}\alpha - \overline{P}^2A + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

かくして

$$\overline{P}^2A = -hP^2\varphi(\alpha) + hP\overline{P}\alpha + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

$\overline{P}^2A$ がオイラー関数の入った式で表されたので,$\sigma(\alpha)$ の入った式

$$h\overline{P}\sigma(\alpha) = h\alpha P + A(\overline{P}-h) - \overline{h} - \overline{P}m$$

に $\overline{P}^2$ を乗じて

$$h\overline{P}^3\sigma(\alpha) = h\overline{P}^2\alpha P + \overline{P}^2A(\overline{P}-h) - \overline{P}^2(\overline{h} + \overline{P}m)$$

よって

$$h\overline{P}^3\sigma(\alpha) = h\overline{P}^2\alpha P + (-hP^2\varphi(\alpha) + hP\overline{P}\alpha - m\overline{P}^2 - \overline{P})(\overline{P}-h) - \overline{P}^2(\overline{h} + \overline{P}m)$$

以上をまとめて h を除すると,

$$\overline{P}^3\sigma(\alpha) + (\overline{P}-h)P^2\varphi(\alpha) = \overline{P}P\alpha(2\overline{P}-h) - m\overline{P}^2 - (P-2)\overline{P}$$

定義 1

$$\overline{P}^3\sigma(\alpha) + (\overline{P}-h)P^2\varphi(\alpha) = \overline{P}P\alpha(2\overline{P}-h) - m\overline{P}^2 - (P-2)\overline{P}$$

上の式を満たす α を　$\sigma - \varphi$ 完全数　という. これは誤解のおきない名前だが本当は至高の完全数 *(supreme perfect number)* と呼びたい.

$P=3, h=1$ とすると,

$$8\sigma(\alpha)+9\varphi(\alpha)=18\alpha-4m-2$$

これの解がどうなるか, 式を見ているだけでは皆目わからない.

5　$P=3$ のとき　$\sigma-\varphi$ 完全数

計算例を示そう.

表 1: $\sigma-\varphi$ 完全数,$P=3, h=1$

$m=-4$		
46449	[3, 2; 13, 1; 397, 1]	D
$m=-3$		
999	[3, 3; 37, 1]	A
18291	[3, 1; 7, 1; 13, 1; 67, 1]	
$m=-2$		
6	[2, 1; 3, 1]	A
99	[3, 2; 11, 1]	A
285	[3, 1; 5, 1; 19, 1]	D
6417	[3, 2; 23, 1; 31, 1]	D
46917	[3, 2; 13, 1; 401, 1]	D
76461	[3, 1; 7, 1; 11, 1; 331, 1]	
795339	[3, 6; 1091, 1]	A

$\alpha=P^eQ, (Q:$ 素数$)$ と書ける解を A 型解という.
$\alpha=P^eQR, (Q, R:$ 素数$)$ と書ける解を D 型解という.
ここで 右辺のリストは素数因子と指数を示す.
古典的完全数では A 型解以外の解 (あれば奇数解) が実在するかが未解決.
例えば $P=3, h=1, m=0$ のとき A 型以外の解はあっても不思議ではない.

表 2: $\sigma - \varphi$ 完全数,$P = 3, h = 1$

$m = -1$		
4	[2, 2]	
75	[3, 1; 5, 2]	
$m = 0$		
117	[3, 2; 13, 1]	A
796797	[3, 6; 1093, 1]	A
423644039001	[3,12 ;797161,1]	A
$m = 1$		
5	[5, 1]	
14	[2, 1; 7, 1]	
15	[3, 1; 5, 1]	A
231	[3, 1; 7, 1; 11, 1]	D
1107	[3, 3; 41, 1]	A

表 3: $\sigma - \varphi$ 完全数,$P = 3, h = 1$

$m = 2$		
7353	[3, 2; 19, 1; 43, 1]	D
47853	[3, 2; 13, 1; 409, 1]	D
$m = 3$		
13	[13, 1]	
21	[3, 1; 7, 1]	A
1161	[3, 3; 43, 1]	A
89181	[3, 5; 367, 1]	A

表 4: $\sigma-\varphi$ 完全数,$P=3,h=1$

$m=4$		
17	[17, 1]	
22	[2, 1; 11, 1]	
98	[2, 1; 7, 2]	
153	[3, 2; 17, 1]	A
345	[3, 1; 5, 1; 23, 1]	D
604881	[3, 3; 43, 1; 521, 1]	D
799713	[3, 6; 1097, 1]	A
1287441	[3, 3; 41, 1; 1163, 1]	D
2405313	[3, 2; 17, 1; 79, 1; 199, 1]	
4902625	[5, 3; 7, 1; 13, 1; 431, 1]	

6 A 型解

$$\overline{P}^3\sigma(\alpha)+(\overline{P}-h)P^2\varphi(\alpha)=\overline{P}P\alpha(2\overline{P}-h)-m\overline{P}^2-(P-2)\overline{P}$$

の解 α が $\alpha=P^{\varepsilon}Q$ と素数 Q で書けたとする.(A 型解) このとき,
$A=\overline{P}^3\sigma(\alpha), B=(\overline{P}-h)P^2\varphi(\alpha), C=\overline{P}P\alpha(2\overline{P}-h), D=-m\overline{P}^2-(P-2)\overline{P}$
とおくと, $A+B=C+D$.
A,B,C,D を順に計算する.
$\alpha=P^{\varepsilon}Q$ に対して $\beta=P^{\varepsilon+1}$ を用いると,

i.
$\overline{P}\alpha=(P^{\varepsilon+1}-1)(Q+1)=P^{\varepsilon+1}Q-Q)+P^{\varepsilon+1}-1=P\alpha-Q+\beta-1.$
によって, $A=\overline{P}^2(P\alpha-Q+\beta-1)$.

ii.
$\varphi(\alpha)=\overline{P}P^{\varepsilon-1}(Q-1)$ なので

$$B=(\overline{P}-h)P^2\varphi(\alpha)=(\overline{P}-h)\overline{P}P^{\varepsilon+1}(Q-1)=(\overline{P}-h)(P\overline{P}\alpha-\overline{P}\beta).$$

iii.

$$\begin{aligned}A+B-C&=\overline{P}^2(P\alpha-Q+\beta-1)+(\overline{P}-h)(P\overline{P}\alpha-\overline{P}\beta)-\overline{P}P\alpha(2\overline{P}-h)\\&=-\overline{P}^2Q+\overline{P}h-\overline{P}^2\beta\\&=D.\end{aligned}$$

$D = -m\overline{P}^2 - \overline{P}^2 + \overline{P}$ によって,

$$-\overline{P}^2 Q + \overline{P}h\beta - \overline{P}^2 = -m\overline{P}^2 - \overline{P}^2 + \overline{P}.$$

$\overline{P}$ を払って

$$-\overline{P}Q + h\beta = -m\overline{P} + 1.$$

これより

$$\overline{P}(Q - m) = h\beta - 1 = hP^{\varepsilon+1} - 1$$

$$Q = \frac{hP^{\varepsilon+1} - 1}{\overline{P}} + m.$$

これ定義の式であり, 先祖返りになる.
次の定理としてまとめる.

定理 1 $\overline{P}^3\sigma(\alpha) + (\overline{P} - h)P^2\varphi(\alpha) = \overline{P}P\alpha(2\overline{P} - h) - m\overline{P}^2 - (P - 2)\overline{P}$ の解 α が $\alpha = P^{\varepsilon}Q$ と素数 Q で書けるとき, $Q = \frac{hP^{\varepsilon+1}-1}{\overline{P}} + m$.

この結果は独立に齋藤之理が定式化して証明した.
なおこれは, $\sigma - \varphi$ 完全数の定義の妥当性を意味する.

7　宇宙完全数

$\sigma - \varphi$ 完全数の定義式において, $P = 2$ とすると,

$$\sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2-h) - m.$$

$h = 1$ のとき, $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ となる. この解は平行移動 m の完全数と呼ばれる.

特に. $m = -12$ とすると $\sigma(\alpha) = 2\alpha + 12$ になる. この解は abundancy 12 の過剰数と呼ばれる.

3 より大の素数 p に対し, $\alpha = 6p$ らは皆解となるので特に通常解という. この他の解もいくつか知られている.

$\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を満たす解 α としてとくに定数 k と素数 p で書ける解 $\alpha = kp$ が複数個あるとしよう.

すると, $m = -2k, \sigma(k) = 2k$ を満たす.　よって k は完全数になる.

さらに, 完全数 k に対して $\sigma(\alpha) = 2\alpha + 2k$ を満たす解 α を宇宙完全数と呼ぶ.

8　変異完全数

さて奇素数 $h > 1$ のときも, $\sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2-h) - m$ に定数 k と素数 p で書ける解 kp が複数個あるとしよう.

すると, $\sigma(k)(p+1) + 4(1-h)\varphi(k)(p-1) = 2(2-h)kp - m$ となる.

これを p の 1 次式にまとめると, p の係数 X は $\sigma(k) + 4(1-h)\varphi(k) + 2(h-2)k$.

複数個の p を許すので $X = 0$. かつ $\sigma(k) - 4(1-h)\varphi(k) = -m$.

さらに　$\sigma(k) + 4(1-h)\varphi(k) + 2(h-2)k = 0$ も満たす.

この解 k を 変異完全数 (strange perfect number), とよぶ. 別名 ケンタウルス完全数.

$\sigma(k) - 4(1-h)\varphi(k) = -m$ で定まる $-m$ を 特大過剰度 (large abundance) とよぶ.

$\sigma(k) + 4(1-h)\varphi(k) + 2(h-2)k = 0$ を満たす k に対して $\sigma(k) - 4(1-h)\varphi(k) = -m$ を満たす m を求める.

$\sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(2-h) - m$ を満たす解 α を乗数 h の宇宙完全数と呼ぶ.

定義を再録する.

定義 2 奇素数 h に対して

$$\sigma(a) + 4(1-h)\varphi(a) + 2(h-2)a = 0$$

満たす解 a を変異完全数 *(strange perfect number)* という.

$P = 2, h = 3, m = 0$ のとき k は A 型に限ると OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) の A007505.

$P = 2, h = 5, m = 0$ のとき k の表は OEISO(n-Line Encyclopedia of Integer Sequences) の A050522.

表 5: 変異 完全数,$P=2, h=3$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
22	[2, 1; 11, 1]	116	[2, 2; 29, 1]	A
92	[2, 2; 23, 1]	520	[2, 3; 5, 1; 13, 1]	A
376	[2, 3; 47, 1]	2192	[2, 4; 137, 1]	A
6112	[2, 5; 191, 1]	36416	[2, 6; 569, 1]	A
24512	[2, 6; 383, 1]	146560	[2, 7; 5, 1; 229, 1]	A
6290432	[2, 10; 6143, 1]	37734400	[2, 11; 5, 2; 11, 1; 67, 1]	A
7125232	[2, 4; 97, 1; 4591, 1]	42151456	[2, 5; 23, 1; 57271, 1]	D

表 6: 変異 完全数,$P=2, h=5$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
38	[2, 1; 19, 1]	348	[2, 2; 3, 1; 29, 1]	A
632	[2, 3; 79, 1]	6192	[2, 4; 3, 2; 43, 1]	A
7605	[3, 2; 5, 1; 13, 2]	74178	[2, 1; 3, 2; 13, 1; 317, 1]	X
24236	[2, 2; 73, 1; 83, 1]	232440	[2, 3; 3, 1; 5, 1; 13, 1; 149, 1]	D
26108	[2, 2; 61, 1; 107, 1]	250392	[2, 3; 3, 1; 10433, 1]	D
129068	[2, 2; 41, 1; 787, 1]	1237752	[2, 3; 3, 2; 17191, 1]	D
163712	[2, 7; 1279, 1]	1635072	[2, 8; 3, 1; 2129, 1]	A
277688	[2, 3; 103, 1; 337, 1]	2720688	[2, 4; 3, 1; 56681, 1]	D
1080328	[2, 3; 83, 1; 1627, 1]	10584528	[2, 4; 3, 1; 220511, 1]	D
2620928	[2, 9; 5119, 1]	26201088	[2, 10; 3, 2; 2843, 1]	A
8836304	[2, 4; 167, 1; 3307, 1]	87473952	[2, 5; 3, 3; 137, 1; 739, 1]	D
41940992	[2, 11; 20479, 1]	419377152	[2, 12; 3, 1; 34129, 1]	A
93029536	[2, 5; 331, 1; 8783, 1]	925629504	[2, 6; 3, 1; 4820987, 1]	D

表 7: 変異 完全数,$P=2, h=7$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解 k の型
3568	[2, 4; 223, 1]	49568	[2, 5; 1549, 1]	A
917248	[2, 8; 3583, 1]	12835328	[2, 9; 11, 1; 43, 1; 53, 1]	A

9 変異完全数の例

表 8: 宇宙完全数,$P = 2, h = 1, m = -12, k = 6$

a	素因数分解	解の型
$6p$	$[2,1;3,1;p,1]$(通常解)	D
304	[2, 4; 19, 1]	A
127744	[2, 8; 499, 1]	A
33501184	[2, 12; 8179, 1]	A
8589082624	[2, 16; 131059, 1]	A

表 9: 宇宙 完全数,$P = 2, h = 1, m = -56, k = 28$

a	素因数分解
$28p$	$[2,2;7,1;p,1]$(通常解)
4544	[2, 6; 71, 1]
9272	[2, 3; 19, 1; 61, 1]
14552	[2, 3; 17, 1; 107, 1]
25472	[2, 7; 199, 1]
74992	[2, 4; 43, 1; 109, 1]
495104	[2, 9; 967, 1]
6019264	[2, 6; 163, 1; 577, 1]
15317696	[2, 6; 137, 1; 1747, 1]

一般に乗数 $h > 1$ のとき, 変異完全数と宇宙完全数を求めることはきわめて意義深い課題ということができる.

表 10: 宇宙 完全数,$P = 2, h = 1, m = -992, k = 496$

a	素因数分解
$496p$	$[2, 4; 31, 1; p, 1]$(通常解)
2892	[2, 2; 3, 1; 241, 1]
6104	[2, 3; 7, 1; 109, 1]
170612	[2, 2; 13, 1; 17, 1; 193, 1]
458144	[2, 5; 103, 1; 139, 1]
857312	[2, 5; 73, 1; 367, 1]
1006496	[2, 5; 71, 1; 443, 1]
1764512	[2, 5; 67, 1; 823, 1]
4041152	[2, 6; 233, 1; 271, 1]
9865304	[2, 3; 17, 3; 251, 1]
11627864	[2, 3; 17, 1; 193, 1; 443, 1]
12445504	[2, 6; 139, 1; 1399, 1]
13170104	[2, 3; 17, 1; 179, 1; 541, 1]
17135864	[2, 3; 17, 1; 163, 1; 773, 1]

表 11: 宇宙 完全数,$P = 2, h = 1, m = -2 * 8128, k = 8128$

a	素因数分解
$8128p$	$[2, 6; 127, 1; p, 1]$(通常解)
48684	[2, 2; 3, 1; 4057, 1]
112952	[2, 3; 7, 1; 2017, 1]
353672	[2, 3; 11, 1; 4019, 1]
396112	[2, 4; 19, 1; 1303, 1]
1243808	[2, 5; 47, 1; 827, 1]
4860050	[2, 1; 5, 2; 13, 1; 7477, 1]
5888672	[2, 5; 59, 1; 3119, 1]

$\alpha = 22p$ と書ける解は通常解だが これ以外の解がみつからない.

表 12: 宇宙 完全数,$P=2,h=3,m=-116,k=22$

α	素因数分解 (通常解)
66	[2, 1; 3, 1; 11, 1]
110	[2, 1; 5, 1; 11, 1]
154	[2, 1; 7, 1; 11, 1]
286	[2, 1; 11, 1; 13, 1]
374	[2, 1; 11, 1; 17, 1]
418	[2, 1; 11, 1; 19, 1]
506	[2, 1; 11, 1; 23, 1]
638	[2, 1; 11, 1; 29, 1]
682	[2, 1; 11, 1; 31, 1]

表 13: 宇宙 完全数,$P=2,h=3,m=-520,k=92$

a	素因数分解 (通常解)
$92p$	$[2,2;23,1;p,1]$(通常解)
1306112	[2, 9; 2551, 1]
5757952	[2, 10; 5623, 1]
38016908	[2, 2; 37, 1; 61, 1; 4211, 1]

表 14: 宇宙 完全数,$P=2,h=3,m=-2192,k=376=2^3*47$

a	素因数分解 (通常解)
$376p$	[2, 3; p, 1; 47, 1]
1120	[2, 5; 5, 1; 7, 1]
5098528	[2, 5; 283, 1; 563, 1]

表 15: 宇宙 完全数,$P=2,h=5,m=-348,k=38$

a	素因数分解 (通常解)
38p	[2, 1; 19, 1; p, 1]
100532	[2, 2; 41, 1; 613, 1]
5350544	[2, 4; 173, 1; 1933, 1]

参考文献

[1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V),(VI),(VII)』, 現代数学社 ,2016,2017,2018,2020,2021.

表 16: 宇宙 完全数,$P=2, h=3, m=-2192, k=376=2^3*47$

a	素因数分解
$376p$	[2, 3; 47, 1; p, 1](通常解)
1120	[2, 5; 5, 1; 7, 1]

表 17: 宇宙 完全数,$P=2, h=5, m=-74178, k=7605$

a	素因数分解
$7605p$	[3,2;5,1;13,2; p, 1](通常解)
2981835	[3, 2; 5, 1; 23, 1; 43, 1; 67, 1]
3087435	[3, 1; 5, 1; 13, 1; 71, 1; 223, 1]

表 18: 宇宙 完全数,$P=2, h=5, m=-232440, k=24236=2^2*73*83$

a	素因数分解
$24236p$	$2^2*73*83*p$ (通常解)
51180	$2^2*3*5*853$
104380	$2^2*5*17*307$
106780	$2^2*5*19*281$
119380	$2^2*5*47*127$

[2] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[3] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[4] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1