完全数の一般化について,

飯高 茂 (学習院大学名誉教授), 斎藤之理 (麻布中１年

1. 前書き

完全数は西暦前370 年より始まる長い研究の歴史を持ち 繰り返しその一般化や類似物が作られ研究されて来た. 奇数の完全数問題など未解決の課題も多い.

ここでは, ベースと乗数, さらに平行移動を含めた完全数の一般化を行う.

約数の和関数 $\sigma(a)$ のほかにオイラー関数も動員するので定義式は複雑になり, 3 項完全数とでもいうべきものになった.

2. ABUNDANCE

自然数 n , 約数の和 $\sigma(n)$ について $I(n) = \sigma(n) - 2n$ を
dancy(過剰度) という.

奇数の k について, $I(n) = k$ を満たす n は少ないが複数個の解
n がある場合を齋藤之理(中学1年生)は求めた. 例えば, k
のとき, 2 個の解 $n = 324, 784$ がある.

$I(n) = 0$ を満たす場合 n は完全数であって, $\sigma(2^e) = p$ が素数の
時, $\alpha = 2^e p$ は完全数になることは, ユークリッドの知るところで
あった.

齋藤之理は n の約数の和 $\sigma(n)$ が素数 p になる場合を 10億以下
の場合に決定した.

このとき, np はユークリッドの完全数となる.

このことを中学校1年の齋藤之理君に指摘されて, 私は大変感心
した.

$\sigma(n)$ が素数になる場合 n は素数べきになる. これを基に完全数
の一般化を試みる.

3.　完全数の一般化

P を素数としこれを固定してベースと考える.

$a = P^e$ について, $\overline{P} = P - 1$ とおくとき $\overline{P}\sigma(a) = P^{e+1}$
$aP - 1$ が成立.($\overline{P} = P - 1$)

$q = \sigma(a) = \dfrac{aP - 1}{\overline{P}}$ が素数のとき $\alpha = aq$ はユークリッドの完全数の一般化である.

m を平行移動のパラメータ, $h(\neq P)$ を別の奇素数または　　これを乗数と見て
$A = \dfrac{hP^{e+1} - 1}{\overline{P}} + m$ は素数と仮定.
$A = \dfrac{haP - 1}{\overline{P}} + m = \dfrac{h(\overline{P}\sigma(a) + 1) - 1}{\overline{P}} + m$ より,
$\overline{P}(A-m) = haP-1$ から $haP = \overline{P}(A-m)+1$ をえる.$\overline{h}$ を使うと

$$\overline{P}(A - m) = h\overline{P}\sigma(a) + \overline{h}$$

A は素数で, $\alpha = aA$ の満たす方程式を次のように求める

$$h\overline{P}\sigma(\alpha) = h\alpha P + A(\overline{P} - h) - \overline{h} - \overline{P}m$$

A が邪魔なので$\alpha = aA$ のオイラー関数を使いこれを消去する

$$h\overline{P}^3\sigma(\alpha) + (\overline{P} - h)hP^2\varphi(\alpha) = \overline{P}P\alpha h(2\overline{P} - h) - mh\overline{P}^2 - h(I$$

を得るので

Definition 1. 上の式を満たす α を m を平行移動のパラメータ h を乗数とする　$\sigma - \varphi$ 完全数　という.

Theorem 1. $\sigma-\varphi$ 完全数　α が $\alpha=P^{\varepsilon}Q$ と素数 Q で書けるとき *(A 型解)*, $Q=\frac{hP^{\varepsilon+1}-1}{\overline{P}}+m$.

この結果は独立に齋藤之理も定式化して証明した.

なおこれは, $\sigma-\varphi$ 完全数の定義の妥当性を保証する.

$P=3, h=1$ とすると,

TABLE 1. $\sigma-\varphi$ 完全数,$P=3, h=1$

$m=0$	
a	素因数分解(素因子 p と指数 e (p,e) のリスト
117 796797 423644039001 (A 型)	[3, 2; 13, 1] (A 型) [3, 6; 1093, 1] (A 型) [3,12 ;797161,1]
$m=1$	
5 14 15 231 1107	([5, 1]) [2, 1; 7, 1] [3, 1; 5, 1] (A 型) [3, 1; 7, 1; 11, 1] (D 型) [3, 3; 41, 1] (A 型)

4. $P=2$ のとき

$\sigma-\varphi$ 完全数の定義式において, $P=2$ とすると,

$$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(2-h)-m.$$

扱いやすい式になる.

$h=1$ のとき, 古典的な場合になる.
$\sigma(\alpha)=2\alpha-m$ を満たす解 α として, 定数 k と素数 p で書ける
解 $\alpha=kp$ が複数個あるとしよう.

すると, $m=-2k, \sigma(k)=2k$ を満たす.　　k は完全数になる
完全数 k に対して $\sigma(\alpha)=2\alpha+2k$ を満たす解 α を宇宙完全数と呼ぶ.

5. $h>1$ のとき

奇素数 $h>1$ のときも, $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(2-h)$ に定数k と素数 p で書ける解kpが複数個あるとしよう.

すると, $\sigma(k)-4(1-h)\varphi(k)=-m.$

さらに $\sigma(k)+4(1-h)\varphi(k)+2(h-2)k=0$ も満たす.

この解k を 変異完全数(strange perfect number), とよぶ. 別名 ケンタウルス完全数.

m が上の式で求められるがこれを,特大過剰度という. このとき

$$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(2-h)-m.$$

の解 α を宇宙完全数と呼ぶ.

Table 2. 変異 完全数,$P = 2, h = 3$

k	素因数分解	$-m$	素因数分解	解　の型
22	[2, 1; 11, 1]	116	[2, 2; 29, 1]	
92	[2, 2; 23, 1]	520	[2, 3; 5, 1; 13, 1]	
376	[2, 3; 47, 1]	2192	[2, 4; 137, 1]	
6112	[2, 5; 191, 1]	36416	[2, 6; 569, 1]	
24512	[2, 6; 383, 1]	146560	[2, 7; 5, 1; 229, 1]	
6290432	[2, 10; 6143, 1]	37734400	[2, 11; 5, 2; 11, 1; 67,	
7125232	[2, 4; 97, 1; 4591, 1]	42151456	[2, 5; 23, 1; 57271, 1	

これらについても宇宙完全数 を実際に求めることは興味ある課題.

TABLE 3. 宇宙 完全数,$P = 2, h = 3, m = -116, k = 22$

α	素因数分解(通常解)
66	[2, 1; 3, 1; 11, 1]
110	[2, 1; 5, 1; 11, 1]
154	[2, 1; 7, 1; 11, 1]
286	[2, 1; 11, 1; 13, 1]
374	[2, 1; 11, 1; 17, 1]
418	[2, 1; 11, 1; 19, 1]
506	[2, 1; 11, 1; 23, 1]
638	[2, 1; 11, 1; 29, 1]
682	[2, 1; 11, 1; 31, 1]

$\alpha = 22p$ と書ける解は通常解だが これ以外の解がみつからない

TABLE 4. 宇宙 完全数,$P = 2, h = 3, m = -520, k = 92$

a	素因数分解
$92p$	$[2, 2; 23, 1; p, 1]$(通常解)
1306112	[2, 9; 2551, 1]
5757952	[2, 10; 5623, 1]
38016908	[2, 2; 37, 1; 61, 1; 4211, 1]

$92p$ 以外の解がある.