

$4X \pm 1$ の問題

学習院大学 理学部 数学科
本田 真樹

コラッツの問題 ($3x + 1$ の問題)

与えられた数 x が偶数なら 2 で割り、奇数なら $3x + 1$ にするという作業を繰り返すと、いつかは 1 になるという予想。

例 : $17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow$
 $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

この問題は依然として未解決である。

$3x - 1$ の問題

平成19年度卒業の平尾さんが研究された問題。与えられた数 x が偶数であれば2で割り、奇数であれば $3x - 1$ にする。これを繰り返した結果、平尾さんは終わり方には次の3パターンがあるとし、これを予想している。

予想される3つの種類

(1) いつかは1になる

例： 15, 44, 22, 11, 32, 16, 8, 4, 2, 1

(2) 循環する

循環のパターンは2つ。

(1) 5, 14, 7, 20, 10, 5

(2) 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82,
41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17

(3) 途中から循環する

例： 36, 18, 9, 26, 13, 38, 19, 56, 28, 14, 7, 20, 10, 5, 14

これは、上で述べた2つの循環節に途中からはいる。

目的

与えられた数 x が3の倍数なら3で割り、3で割ったときの余りが1ならば $4x - 1$ 、余りが2ならば類似した $4x + 1$ にするという作業を繰り返す。するとどのようなようになるかについてを研究する。

これを関数でまとめると

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & (x \equiv 1 \pmod{3}) \\ 4x + 1 & (x \equiv 2 \pmod{3}) \\ x/3 & (x \equiv 0 \pmod{3}) \end{cases}$$

いろいろな数字で試してみる。

例：5, 21, 7, 27, 9, 3, 1

このような計算を与える数を増やしていき、それまでの計算で出てきた数が出れば計算を終了するプログラムを作ってみたところ、コラッツの問題同様1になると予想される。

例：5, 21, 7, 27, 9, 3, 1

6, 2, 9 5の列に入る

7, 27 5の列に入る

⋮

結果

これらの計算結果から、自然数 n からスタートすればいつかは1になると予想される。そこで n からスタートし、この計算をして1になることを予想 $H(n)$ とおく。そして $H(n)$ の成立しない最小の数を n とする。 n からスタートして、 n より小さい数 $H(m)$ は成立するので、 $H(n)$ も成立する。よってこのプログラムでは与えられた数 n より小さい数が出ればそれは1になると判断出来る。

予想の検証

今までの予想が実際に成り立つのか100000まで検証してみる。また100000で行った計算をグラフにしてみる。

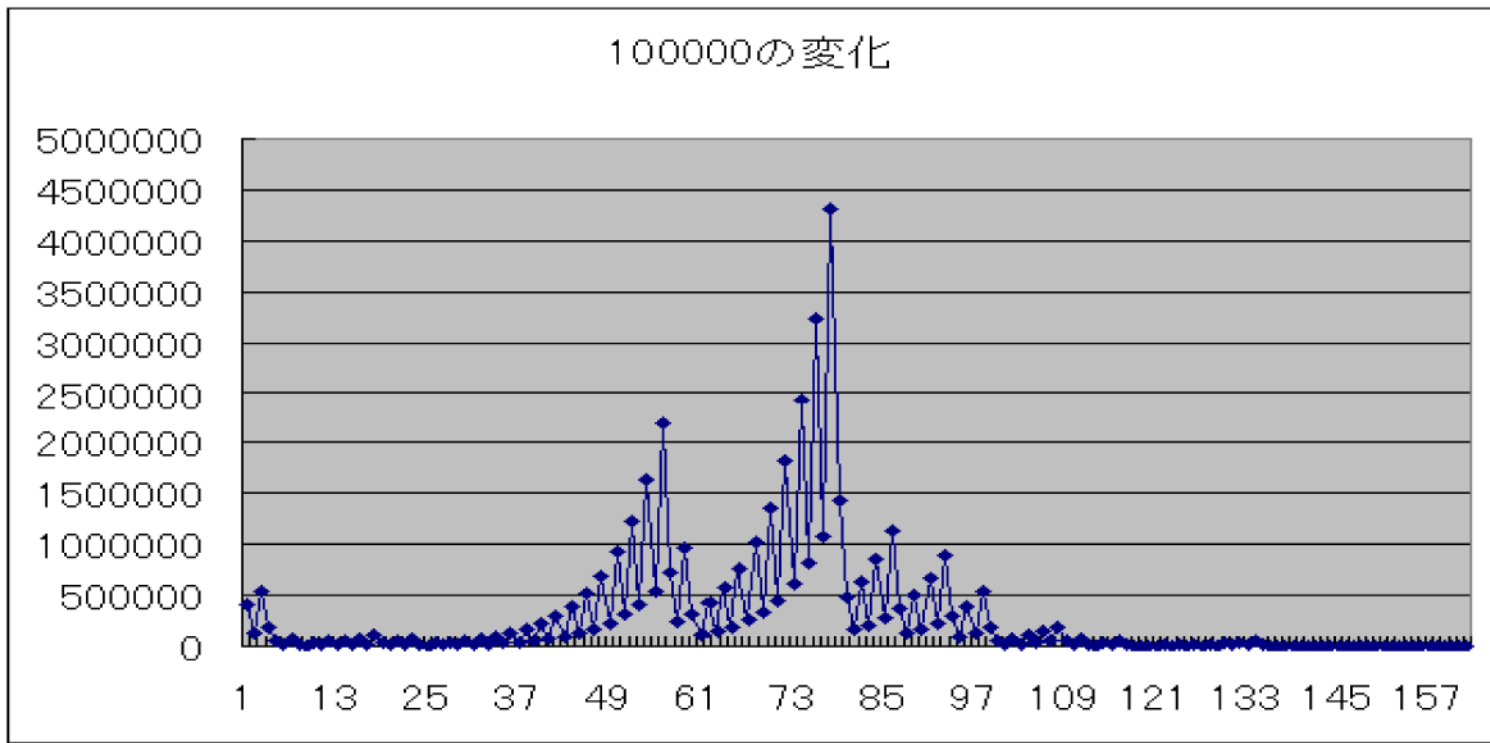


FIGURE 1. 100000 の変化

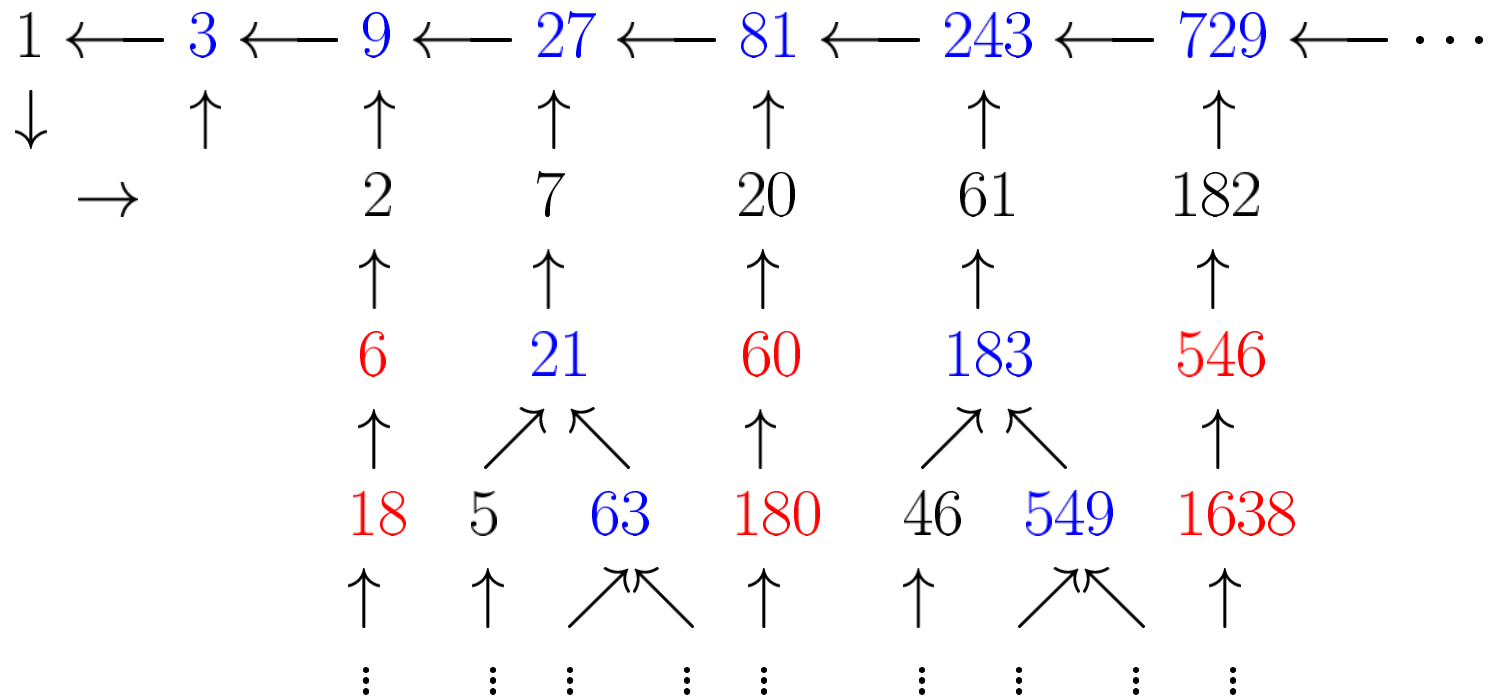
大きくなるのと、小さくなるのを繰り返しながら段々振り幅が大きくなる。そこから段々と振り幅が小さくなり始め最終的に1になる。

1番大きい数→**4315653**。1になるまでの計算回数→**162**回。

逆向きの演算

今までやってきた演算を逆向きに行う。 3^n は必ず1に行くことは明らかなので、その数列をもとに考えてみる。

1 3 9 27 81 243 729...



3の倍数と6の倍数に注目。

3の倍数 → 分岐する。 ($9 = 27/3$ or $2 \times 4 + 1$)

6の倍数 → 3の倍数でもあるが、分岐せずに3倍。

$f(x) = y$ とおくと、上の条件から $y \equiv 3 \pmod{6}$ が成り立つものは2つに分岐する。プログラムを作り計算してみた。

予想したように6の倍数はそのまま3倍。

$y \equiv 3 \pmod{6}$ が成り立つものは分岐した方の数が出ている。

数値の範囲を広げて検証してみたが同様の結果になった。
また出てきた数を並び替えてみると自然数を網羅する。
逆向きの演算からも、 $4x \pm 1$ の計算で自然数は1になる。

まとめ

- ・コラッツの計算や $4x \pm 1$ の計算も1を最終的なものとして見ているが、 $4x \pm 1$ の逆向きの演算で示した通りに1と3で循環している。
- ・他の場合も試してみた。

様々なパターンを試してみたが、必ず循環するパターンは見つからなかった。