双子素数予想式の評価など ［補正版2］

宇都宮 潔
2025年1月24日

§1. 対数積分Li(x)について

$-\infty < X < \infty$でe^Xのテーラー展開から,

$\dfrac{e^X}{X}=\dfrac{1}{X}\left(1+\dfrac{1}{1!}X+\dfrac{1}{2!}X^2+\dfrac{1}{3!}X^3+\cdots\right)=\dfrac{1}{X}+1+\dfrac{1}{2!}X+\dfrac{1}{3!}X^2+\cdots$であるから,

$\displaystyle\int\frac{e^X}{X}\,dX=\log X+X+\frac{1}{2\cdot 2!}X^2+\frac{1}{3\cdot 3!}X^3+\cdots$で, $X=\log t$を代入し,

$$\int\frac{dt}{\log t}=\log(\log t)+\log t+\frac{(\log t)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(\log t)^3}{3\cdot 3!}+\frac{(\log t)^4}{4\cdot 4!}+\cdots$$

が導かれるから, 対数積分Li(x)は次式で正確な値が与えられる[JS].

(1.1) $$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\log(t)}=\log(\log x)-\log(\log 2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log x)^n-(\log 2)^n}{n\cdot n!}$$

Li(x)の値を与える主要項は, 無限和$\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n/n\cdot n!$である.

部分積分から得られる(1.2)は, 大きいn,xに対し誤差過大のため不適切.

(1.2) $$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\log(t)}=\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}+\sum_{k=1}^{n}k!\left\{\frac{x}{(\log x)^k}-\frac{2}{(\log 2)^k}\right\}.$$

§2. いくつかの不等式について

まず, 以下の命題でも前提として知っておいた方がよい事柄を定理としてあげておきます.

定理2.1(Helge von Koch,1901) リーマン仮説(RH:Riemann Hypothesis)

RH:すべての零点が直線Re(s)=1/2上に乗っている, という仮定の下で(2.1)式が成り立つ.

(2.1) $$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

定理2.2 (Littlewood,1914,1918)

(2.2)

（ｉ） $\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\dfrac{\log\log\log x}{\log x}\right)$

（ii） $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$は符号を無限回変える. ［WN2],[WKL] x≧1のとき, $\log x < \sqrt{x}$から, $\log(\log x) < \frac{1}{2}\log x < \sqrt{x}\log x$から

<u>x≧1のとき, $\log(\log x) < \sqrt{x}\log x$</u> であるから, (2.3)が成り立つ.

(2.3) $$x \geqq 1 \text{のとき,}\ \frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}\ln(x)} < 1$$

(2.3)式⇔$\sqrt{x}\ln(x)-\ln(\ln(x)) > 0$を微分法によっても容易に証明できる.

実は正直に言うと, 準備の過程で誤り(下線部)に気づき, 不等式(2.3)に関連する 命題を撤回した. ［注1］ 新たな気づきについては, 補遺1参照.

さて, 十分大きいxに対して, M*はある定数として, (2.4)が成り立ちます.

(2.4) $$\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{(\ln(x))^2} < M^*$$

Littelwoodの式をKochの式にある$\sqrt{x}\log x$で割ってみると,

$$\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}(x)}{\sqrt{x}\log x} = \frac{\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\frac{\log(\log(\log x))}{\log x}\right)}{\sqrt{x}\log x} = \Omega_{\pm}\left(\frac{\log(\log(\log x))}{(\log x)^2}\right)$$

となるので, 符号変化を加味して, 関数$\ln(\ln(\ln(x)))/(\ln(x))^2$が有界であることを示したい。$x \geqq e^{e^e}$なら, $\log(\log(\log x)) \geqq 1$ なので, xをe^{e^e}≒381.5万より大きくとり,

$x=e^{e^t}$(t>1)と置換.つねに$\frac{\log(\log(\log x))}{(\log x)^2} > 0$ と出来るが,

正しくは$\left|\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}(x)}{\sqrt{x}\log x}\right| = \Omega\left(\frac{\log(\log(\log x))}{(\log x)^2}\right) > 0.$

(2.4)を示すには, (2.4) ⇔ $M^*(\log x)^2-\log(\log(\log x)) > 0$ なので, M*=1とし,

$x \geqq e^e$のとき, $g(x)=(\log x)^2-\log(\log(\log x))$が単調増加で, 最小値$g(e^e)=e^2>0$が言え, M*≧1なるM*を選べば, (2.4)が成り立ちます.

(2.3)が没となったので, 変になりましたが, 続いて,(2.5)の成立も言えます.

(2.5) $$\frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}\ln(x)} < \frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{(\ln(x))^2}$$

つまり, (2.5)を同値変形した(2.5.1)を示す訳です.

(2.5.1) $$x \geqq e^{e^e} \text{ のとき,}\ \ln(x)\cdot\ln(\ln(x)) < \sqrt{x}\ln(\ln(\ln(x)))$$

$F(t)=e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))-t\cdot\ln(t)$とおき, 同値な次の命題を示せばよい。

(2.5.2) $t \geqq e^{ce}$ (cはある正の定数)のとき, F(t)>0 ; cは1近くのある値.

(今や我々はSkewes数の入口に立っているのです.) $t=u^2$と置換して,

テイラー展開$e^{u^2/2} = 1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2!}+\frac{u^6}{3!}+O(u^8)$を利用すれば, $c_1=\frac{\ln 7}{e}=0.715\cdots$.

さらに良いcの近似値は，関係式 $\ln(\ln t)<\sqrt{t}/2$を用いると，$c_2=\dfrac{\ln 6}{e}= 0.659\cdots$.

c_2はPC計算での$F(x)=0$ となるcの値≒0.6458…と極めて近い.【補遺2】参照.

(2.3)～(2.5)に関連して，当時見つけた不等式(2.6)を以下に紹介しておくので，挑戦して見られたい.

[Hint] 部分積分を使うが，方程式 $\dfrac{\ln(\ln(x))}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x\ln(x)}$の解$x=\alpha(=4.12\cdots)$の前後で符号が変わるので積分$J=\displaystyle\int_2^x \frac{\ln(\ln u)}{2\sqrt{u}}du$を2つに分けて評価する. 詳細は【補遺3】参照:

(2.6) $x>e^4$ (>55)のとき，$I=\displaystyle\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u}<\sqrt{x}\log(\log x)$

(2.6)に続いて，(2.7)が閃いた.これが今回,双子素数予想式(4.2)に繋がります.

(2.7) $$\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u}<\int_2^x \frac{du}{\log(u+2)\log u}\overset{?}{<}\Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$

$u\geqq 2$のとき，$\sqrt{u}>\ln(u+2)$に注目. $\ln 2\fallingdotseq 0.6931$.

［注2］ 二個目の積分は正値をとり,かつ発散するので，定理2.2から，$\Omega_{\pm}$を単にΩと改めることができる.(2.6)と(2.7)の関連などについては【補遺4】へ.

§3.双子素数予想式の個数計算について

$li(x)=li(2)+Li(x)$, $li(2)=1.045\cdots$より，$li(x)=Li(x)+o(1)$のため，十分大きいxに対しては,(2.1)を(3.1)として扱うことが出来る.

(3.1) $$\pi(x)-Li(x)=O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

つぎに(2.7)を示したい。

(2.7)再掲 $$\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u}<\int_2^x \frac{du}{\log(u+2)\log u}\overset{?}{<}\Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$

(2.7)の最右辺はLittlewoodの定理2(ⅰ)に現れるものです.また,中央の積分は今日の主題:双子素数予想式(4.2)のものです.

まず，$Li(x):=\displaystyle\int_2^x \frac{du}{\log u}$なので,$\dfrac{d}{dx}Li(x)=\dfrac{1}{\log x}$. また,

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\log x}=\frac{d}{dx}(x(\log x)^{-1})=1\cdot(\log x)^{-1}+x\cdot\left\{-(\log x)^{-2}\right\}\cdot(\log x)'$$

$$=\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\Leftrightarrow\frac{1}{(\log x)^2}=\frac{1}{\log x}-\frac{d}{dx}\frac{x}{\log x}$$から,

(3.2) $$\int\frac{du}{(\log u)^2}=\int\frac{du}{\log u}-\frac{x}{\log x}$$

素数定理 :十分大きいxに対して$\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ と定理2.2を念頭に置いて,

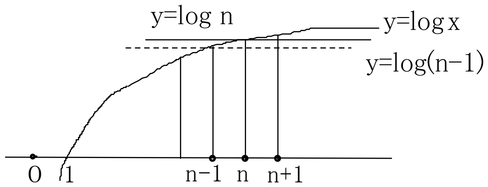
$Li_2(x) := Li(x) - \dfrac{x}{\log x}$ と定義すると[MW],

(3.2*) $$Li_2(x)=\int_2^x\frac{du}{(\log u)^2}= Li(x)-\frac{x}{\log x}.$$

次いで,

(3.3) $$(\log u)^2<\log u\log(u+2)<(\log(u+1))^2$$

を使い,双子素数予想式(4.2)の個数$\pi_2(x)$が計算でき, Marek Wolf の主張[MW]を追試できた(後述).のみならず, ….



(1) y= log xは上に凸で,単調増加であるから,

$\log n - \log(n-1) > \log(n+1) - \log n$

$\Leftrightarrow 2\log n > \log(n+1) + \log(n-1)$

$\Leftrightarrow \log n^2 > \log(n+1)(n-1) = \log(n^2-1)$

$n \to u+1$と変換し

$u>0$のとき, $\log(u+1)^2 > \log u(u+2)$

(2) y=log(logx)は, 区間$x \geqq e$で上に凸で,単調減少である.

u=log xとおけば, y= log u $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\log x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\{x^{-1}(\log x)^{-1}\} = -x^{-2}(\log x)^{-1}+x^{-1}\cdot\left\{-\frac{(\log x)^{-2}}{x}\right\}$$
$$=-\frac{1}{x^2\log x}-\frac{1}{x^2(\log x)^2}=-\frac{(\log x)+1}{x^2(\log x)^2}<0$$

(3.3)の1番目の不等式は, $\log u<\log(u+2)$から自明.

$\log u\log(u+2)<\{\log(u+1)\}^2$ を以下で示す.

[証明1] $u\geqq 1$, k=0,1,2のとき, $\log(u+k)>0$であるから, 相加相乗平均より

$$\frac{1}{2}\{\log u+\log(u+2)\} \geqq \sqrt{(\log u)(\log(u+2))}$$

左辺$=\dfrac{1}{2}\log u(u+2)=\dfrac{1}{2}\log\left\{(u+1)^2-1\right\}<\dfrac{1}{2}\log(u+1)^2=\log(u+1)$

であるから, $\log(u+1)>\sqrt{(\log u)(\log(u+2))}$

したがって, $(\log(u+1))^2>(\log u)(\log(u+2))$ □

(3.3)から,(3.4)が導かれる.

(3.4) $$\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} > \int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} > \int_2^x \frac{du}{(\log(u+1))^2}$$

中央式が両端から計算するしかないことである.

$$\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} = \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(2), \int_2^x \frac{du}{(\log(u+1))^2} = \int_3^{x+1} \frac{du}{(\log u)^2} = \mathrm{Li}_2(x+1) - \mathrm{Li}_2(3)$$

$\varepsilon = 10^{-14}$ (Excelの限界精度)などにとり, 両端の平均値で定める.

(3.5) $$\int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} := \frac{1}{2}\{ (\mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(2) + \varepsilon) + (\mathrm{Li}_2(x+1) - \mathrm{Li}_2(3) - \varepsilon) \}$$

こうして[MW]にある最初のData29個が追試できた. それだけではない.

(3.3)の最右辺は置換により, $\mathrm{Li}_2(x+1) - \mathrm{Li}_2(3)$ となるので, (3.4)(3.5)の2式で双子素数の個数を求める式では, 差は$(p+2)-p=2$ではなく, $(x+1)-x=1$, $3-2=1$と半分になるのである.したがって, (3.5)の代わりに(3.6)を試す価値は十分ある.

(3.6) $$\int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} = \mathrm{Li}_2\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\{ \mathrm{Li}_2(2) + \mathrm{Li}_2(3) \}$$

(3.6)* $$\int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} = \mathrm{Li}_2\left(x+\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Li}_2(2.5)$$

[追記1] 追加資料[Excel PDF]は(3.6)式で作成している. 公式(4.3)を(3.6)*で計算しても高々0.188…しか変わらず, 個数が偶々1個ずれる確率は20%未満である.

本原稿は[MW]の追試検証を目的としているため, (3.6)を採用した.

公式(4.3)は右辺の式が正しい双子素数の個数を与えるために創案されているから, 定理2.2から, $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$の符号が無限回変わることを実験で確認するには, 両辺の差をとって調べる. それが右辺の式, すなわち,$\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$に起因する, と考える訳である. 利用したWolfram Alphaのサイトは双子素数の番号付けは, ① 3 ② 5 ③ 7,… としており, 弟が偶数番号, 兄が奇数番号である. これはBrun定数[BC]に関連しており, 当初Brun自身が組(3,5)を除いて算出しているし, (3,5)と(5,7)を区別すると,素数5だけ2度カウントし, 不合理と考えたのだろう.

実際PC計算上で, 29個については, 1個を除き, 2×10^{-10}以下の精度(すべて, 1.04×10^{-10}～2.09×10^{-10}の範囲内)で近似できた.

上限x,x+1ではxはつねに十分大きい値を対象にするので, $\mathrm{Li}_2(x)$と$\mathrm{Li}_2(x+1)$はほとんど同じ値である. 従って, $\mathrm{Li}(x+1/2)$で代用しても同じである. ところが, 下限2,3に対しては, $(\mathrm{Li}_2(2)+\mathrm{Li}_2(3))/2-\mathrm{Li}_2(2.5)=0.14258\cdots$ で無視し難い.

Euler数: γ=0.577215664901532860606512　【式番号(9)(10)はMarek氏の論文のもの】

(9) $$\mathrm{li}(x)=\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln(u)}=\gamma+\ln(\ln(x))+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln(x))^n}{n\cdot n!}\quad \text{for } x>1$$

(10) $$\mathrm{li}(x)=\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln(u)}=\gamma+\ln(\ln(x))+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\ln(x))^n}{n!\cdot 2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\frac{1}{2k+1}\quad \text{(Ramanujan)}$$

$\mathrm{li}(\mu)=\int_{0}^{\mu}\frac{du}{\ln(u)}=0$ ，　μ=1.45136923488338105028 は極めて便利な定数.

μを使った定義式(9),(10)は次の2方法に比較して収束も速く正確である.

$$\mathrm{Li}(x)=\int_{2}^{x}\frac{du}{\ln u}=\int_{2}^{\mu}\frac{du}{\ln u}+\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln u}=\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln u}-\int_{\mu}^{2}\frac{du}{\ln u},$$

$$\mathrm{Li}(x)=\int_{2}^{x}\frac{du}{\ln u}=\int_{2}^{0}\frac{du}{\ln u}+\int_{0}^{x}\frac{du}{\ln u}=\int_{0}^{x}\frac{du}{\ln u}-\int_{0}^{2}\frac{du}{\ln u}=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(2).$$

(*) $$F(N,x)=\gamma+\ln(\ln(x))+\sum_{n=1}^{N}\frac{(\ln(x))^n}{n\cdot n!}$$

C2=0.660161815846869573927812110014　Wikipediaより 小数第30位までの値 Hardy-Littlewood[HL]定数

［追記2］　(*)印の定義関数F(N,x)に対して, (3.5)から, $\mathrm{Li}_{2a}(x)$,$\mathrm{Li}_{2b}(x)$を次式で定めると,

(i)
$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Li2a}(x)&=F(100,x)-\frac{x}{\ln(x)}-\left(F(100,2)-\frac{2}{\ln(2)}\right)+10^{-14}\quad 弟\\ \mathrm{Li2b}(x)&=F(100,x)-\frac{x}{\ln(x)}-\left(F(100,3)-\frac{3}{\ln(3)}\right)-10^{-14}\quad 兄\end{aligned}\right\}\text{に対して,}$$

$\pi_2(x)-2C_2(\mathrm{Li}_{2a}(x)+\mathrm{Li}_{2b}(x))$とすることで, 割り付けられた双子素数番号

$\pi_2(x)$と$2C_2(\mathrm{Li}_{2a}(x)+\mathrm{Li}_{2b}(x))$の差が符号付きで変動することが検出できる.

また, (3.6)に対しては, 次式のLi2(x)に対して,

(ii) $$\mathrm{Li2}(x)=F(100,x)-\frac{x}{\ln(x)}-\frac{1}{2}\left\{\left(F(100,2)-\frac{2}{\ln(2)}\right)+\left(F(100,3)-\frac{3}{\ln(3)}\right)\right\}$$

$\pi_2(x)-4C_2\mathrm{Li}_2(x+1/2)$とする.

さらに, 個数の概算だけを目的とする場合には, (3.6)*に対しては,

(iii) $$\mathrm{Li2}(x)=F(100,x)-\frac{x}{\ln(x)}-\frac{1}{2}\left(F(100,2.5)-\frac{2.5}{\ln(2.5)}\right)$$

$\pi_2(x)\sim 4C_2\mathrm{Li}_2(x+1/2)$とすれば, 81%程度の確率で当たる.

Marek Wolfの論文[MK]にある, 最初に符号変化が検出された組

① (1369391,1369393) [追加PDF資料の番号①と同一]では,

①
(ⅰ) 21484-2*C2*(Li2a(1369337)+Li2b(1369338)) = -0.585648880218462
21486-2*C2*(Li2a(1369391)+Li2b(1369392)) = 0.700136724995808

(ⅱ) 21484-4*C2*(Li2(1369337+1/2)) = -0.585648880371919
21486-4*C2*(Li2(1369391+1/2)) = 0.700136724827219

(ⅰ)と(ⅱ)の差異は，符号変化後に約1.68×10^{-10}である.

-0.585648880218462-(-0.585648880371919) = 1.53457×10^{-10}

0.700136724995808-(0.700136724827219) = 1.68589×10^{-10}

(ⅲ)では，②③のケースは検出できない恐れが高い.

§4.いくつかの素数の個数予想式について

(4.1) $$P_2(x)\sim\frac{2C_2x}{(\log x)^2},\quad C_2=\prod_{p\geqq3}\left\{\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\right\}=\prod_{p\geqq3}\left\{1-\frac{1}{(p-1)^2}\right\}$$

(4.1)はG.H.HardyとE.M.Wrightが[HW]数論入門ⅡP129で，記した双子素数の予想式である。Wikipediaは，これを踏襲した積分形(4.2)で表記する.

(4.2) $$\pi_2(x)\sim2C_2\int_2^x\frac{du}{(\log u)^2}$$

C_2はHardy-LIttlewood (HL)定数と呼ばれ，値は0.6601618158….
p≦xの素数の個数は記号$\pi(x)$で，$\pi_2(x)$は区間[2,x]にある双子素数の組数を意味する.素数の分布関数はGaussが導入した$f(x)=1/\log x$が最初とされる.双子素数(p, p+2)ではpとp+2が2個の独立事象A,Bの中で生起すると考えられ，同時に積事象A∩Bの起きる確率は,

積の法則 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

に従うので，「差が2」と考えるのが厳密には正しい.

したがって，双子素数予想式は正しくは,(4.3)でなければならない.

(4.3) $$\pi_2(x)\sim2C_2\int_2^x\frac{du}{\log u\log(u+2)}.\quad C_2=\prod_{p\geqq3}\left\{\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\right\}.$$

高橋洋翔君による,スーパー双子素数予想式(4.4)について，[ISA]には，詳しい補完説明が載っている(2018).

(4.4) $$\pi_{ST}(x)\sim2AB\int_2^x\frac{dt}{\log(at+b)\log t},\ A=\prod_{p\geqq3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2},\ B=\prod_{\substack{p|a,b\\p\geqq3}}\frac{p-1}{p-2}.$$

これに関連して，裳華房数学コラムにコラム記事(2016.3.2)があるのを昨年暮れに見つけた[MSC].

昨年8月8日のZoomの発表前には，Wolfram Alphaのサイト[WA]で，$\pi_2(x)$の積分計算が自由に出来たのに，24年暮れには「発散します」．現在は「入力に誤りがないかお確かめください」と表示される.省エネ？

$\pi_2(x)$の計算で， li(x)関数を用いる方法を数段階に分けて紹介します：

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\log x}=\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}=\frac{1}{\log x}-\frac{d}{dx}\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^2}=\frac{1}{\log x}-\frac{d}{dx}\frac{x}{\log x}$$

したがって，$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dx}{\log x}$として，(4.5)が得られる.

$$\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^2}=\mathrm{Li}(x)-\frac{x}{\log x}-\left(\mathrm{Li}(2)-\frac{2}{\log 2}\right)\tag{4.5}$$

(4.5)を利用すれば，現在でも[WA]で計算が自由に行える. これに関して，Polandの物理・数学者Marek Wolf氏は，$\mathrm{Li}_2(x):=\mathrm{Li}(x)-x/\log x$を導入して，簡明な扱いを可能にし，Littlewoodの評価式(4.5)を双子素数の場合に確かめた[MW].(§3で計算式(3.3)と(3.4)を述べた)

$$\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^2}=\mathrm{Li}_2(x)-\mathrm{Li}_2(2)\,;\ \mathrm{Li}_2(2)=-1.840226301\cdots.\tag{4.5.1}$$

定理2.2再び: $\pi(x)=x/(\ln x-1)$でなければ定理2.2は成立しない事を『素数定理の誤差評価』で示した.

(2.2)

（ｉ） $\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\Omega_\pm\left(\sqrt{x}\frac{\log\log\log x}{\log x}\right)$

（ii） $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$は符号を無限回変える.［WN2;1914,1918],[WKL]

Littlewoodは初めは(2.2)の右辺が$\Omega_\pm$でなくoであることを証明しようとしてこれが不可能であることを証明してしまって，この結論(2.2)に至った. Littlewoodの結果(2.2)は，RHを仮定したときである，と[PNT]にある。

ランダウの記号[RS]:

$f(x)=o(g(x))$ は，およそ $f(x)<g(x)$ の意味，

$f(x)=\Omega_\pm(g(x))$はx≧k (k>0)なる十分大きいxに対して，$|f(x)|\geqq k\cdot g(x)$の意味.

Ω記号はHLによる導入が始まりで，上記の理由から単にoの否定だった.

HLは同じ論理で，ωはoの否定として導入したようだ。

$f(x)=O(g(x))$ は，上のx≧kに対し，$|f(x)|<k\cdot g(x)$ の意味，

$f=o(g)$ならば，$f=O(g)$であり，oの方が強い条件[HW].

(2.2)に関して，時を13年遡って，H.von Koch(1901)はリーマン仮説(RH)の下で，(3.1)の成立を証明していた．

RH: $\zeta(s)$のすべての複素零点が直線Re s=1/2上にある，
の仮定の下で，(3.1*)が成り立つ．

(3.1*) $$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

Riemannは十分大きいxについて，$\pi(x)<\mathrm{li}(x)$である，と述べたらしいが，Schmidtにより背理法により証明された(1903)[WN2]．すなわち，

$\pi(x)<\mathrm{li}(x)$ならば，リーマン仮説が成り立つ．

しかし，Littlewoodは自分が証明した定理2.2のために，リーマン予想は不成立だと信じており,本も書いているらしい[WKL,1962]．

Ingham[AEI]によると，定理2.2の証明でLittelwoodは，RHが成り立たないと仮定した証明で1ページ，他方，RHが成り立つと仮定した証明で12ページを費やしているそうだ[WKL]．

【Supplement】

【補遺1】 $x\geqq 1$のとき，$\log(\log x)<\sqrt{x}\log x$ …(1)，$\frac{1}{2}\log x<\sqrt{x}\log x$ …(2) なので，

$$\log(\log(\log x))=\log\sqrt{x}+\log(\log x)\overset{(1)}{<}\frac{1}{2}\log x+\sqrt{x}\log x$$
$$\overset{(2)}{<}\sqrt{x}\log x+\sqrt{x}\log x=2\sqrt{x}\log x=O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

$$\therefore\ \log(\log(\log x))=O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

これから,上の計算を反復すれば，次が導かれる．

$$\log(\log(\log(\log x)))=O\left(\log\sqrt{x}+\log(\log x)\right)=O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

したがって，logを2回以上なら，何回続けてとっても,オミクロン記号では同じで，

$$\boxed{\log(\log\cdots(\log(\log x)))=O\left(\sqrt{x}\log x\right).}$$ □

【補遺2】 $$\frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}\ln(x)}<\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{(\ln(x))^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

$$(2.5)\Leftrightarrow \ln(x)\cdot\ln(\ln(x))<\sqrt{x}\ln(\ln(\ln(x)))\ \text{for}\ x\geqq e^{e^{e}} \quad\cdots\cdots\cdots \quad (2.5.1)$$

(2.5.1)を証明したい。そのために，$x=e^t$ とおくと，$\ln(x)=t$．

$F(t)=e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))-t\cdot\ln(t)$とおき，同値な次の命題を示す。

$t\geqq e^{ce}$(cはある正の定数)のとき，$F(t)>0$ …………… (2.5.2)

［証明1］ $F'(t)=\frac{1}{2}e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))+e^{t/2}\frac{1}{t\cdot\ln(t)}-\ln(t)-1$

$$=\frac{1}{2}e^{t/2}\cdot\frac{2+\ln(\ln(t))}{t\cdot\ln(t)}-\ln(t)-1>\frac{e^{t/2}}{t\sqrt{t}}-\sqrt{t}-1.$$

上の最後の不等式で，$t>e$のとき，$\ln(t)<\sqrt{t}\iff\frac{1}{\sqrt{t}}<\frac{1}{\ln(t)}$，$-\ln(t)>-\sqrt{t}$と，

$\ln(\ln(t))>0$であることを用いた。次いで，$t=u^2$とおくと，$u\geqq e^{ce/2}$のとき，

$$=\frac{1+\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^3+O(u^8)}{u^3}-u-1$$

$$e^{u^2/2}=1+\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^3+O(u^8)$$

$$=\frac{1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{8}+\frac{u^6}{48}+O(u^8)}{u^3}-u-1>\frac{u^6+6u^4+24u^2+48+O(u^8)}{48u^3}-\frac{48u^4+48u^3}{48u^3}>$$

$$\frac{u^6-42u^4-48u^3+24u^2+48+O(u^8)}{48u^3}$$

$$>\frac{u^6-42u^4-48u^3}{48u^3}>\frac{u^3-42u-48}{48}$$

$f(u)=u^3-42u-48$ $f'(u)=3u^2-42=3\left(u^2-14\right)$

$u>\sqrt{14}=3.74\cdots$のとき，$f'(u)>0$だから，$f(u)$は単調増加.

$g(u)=3u^2-42$ $g(e^e)=646.9\cdots$ $e^e\fallingdotseq 15.154$

$g(u)=f'(u)>0$. すなわち，$f(u)$は$u>\sqrt{14}$のとき，単調増加.

$f(u)=u^3-42u-48$ $f(e^e)=2795.7\cdots$

$e^{c_1e}=7$ とおくと，$c_1e=\ln 7$. $c_1=\frac{\ln 7}{e}=0.715\cdots$

$f(5)=-133$ $f(6)=-84$ $f(7)=1$ $f(8)=128$ $f(9)=303$ $\frac{\ln 7}{e}=0.715860338204307$ $e^{0.715860338204307e}$ $=7.00000000000001$

$f(e^{\ln 7})=1.00000000000009$ $F(e^{\ln 7})=8.42457251628707$

またはPC数値計算により，$c=0.645811858+\varepsilon$にとれば，$u\geqq e^{ce}$のとき，$f(u)>0$.

よって，

$t\geqq e^{ce}$ $(c>1)$のとき，$F(t)>0$.

$F(t)=e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))-t\cdot\ln(t)$

$c=0.645811858$

$F(e^e)=1911.8243922101$

$F(e^{0.645811858e})=2.19793023965645\times10^{-8}$

［証明2］ $F'(t)=\frac{1}{2}e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))+e^{t/2}\frac{1}{t\cdot\ln(t)}-\ln(t)-1=\frac{1}{2}e^{t/2}\cdot\frac{2+\ln(\ln(t))}{t\cdot\ln(t)}-\ln(t)-1.$

上の最後の不等式で，$t>e$のとき，$\ln(t)<\sqrt{t}\iff\frac{1}{\sqrt{t}}<\frac{1}{\ln(t)}$，$-\ln(t)>-\sqrt{t}$と，

$\boxed{\ln(\ln(t))>\frac{1}{2}\sqrt{t}}$であることを用い，かつ，$t=u^2$とおくと，さらに良い近似で

cの値が求められた。

$$=\frac{1}{2}e^{t/2}\cdot\frac{2+\ln(\ln(t))}{t\cdot\ln(t)}-\ln(t)-1>\frac{e^{t/2}(2+\sqrt{t}/2\ )}{2t\sqrt{t}}-\sqrt{t}-1.$$

$$=\frac{e^{t/2}(4+\sqrt{t})}{4t\sqrt{t}}-\sqrt{t}-1=\frac{e^{u^2/2}(4+u)}{4u^3}-u-1.$$

$$e^{u^2/2}=1+\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{u^2}{2}\right)^3+O(u^8)$$

$t=u^2$, $e^{u^2/2}=1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{8}+\frac{u^6}{48}+O(u^8)$であるから,

$$=\frac{\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{8}+\frac{u^6}{48}+O(u^8)\right)(4+u)}{4u^3}-u-1$$

ここで, $\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{8}+\frac{u^6}{48}\right)(4+u)=\frac{1}{48}u^7+\frac{1}{12}u^6+\frac{1}{8}u^5+\frac{1}{2}u^4+\frac{1}{2}u^3+2u^2+u+4$

$=\frac{1}{48}(u^7+4u^6+6u^5+24u^4+24u^3+96u^2+48u+192)$ なので,

$$>\frac{u^7+4u^6+6u^5+24u^4+24u^3+96u^2+48u+192}{192u^3}-\frac{192u^4+192u^3}{192u^3}$$

$$=\frac{u^7+4u^6+6u^5-168u^4-168u^3+96u^2+48u+192}{192u^3}>\frac{u^4+4u^3+6u^2-168u-168}{192}$$

符号が正なので分子の2次以下の3項は簡単化のため捨てる.

$\zeta(u)=u^4+4u^3+6u^2-168u-168$, $\zeta'(u)=4u^3+12u^2+12u-168=4\left(u^3+3u^2+3u-42\right)$

$\zeta''(u)=4(3u^2+6u+3)=12(u+1)^2>0$

$\therefore$ $\zeta(u)$は下に凸で, $\zeta'(u)$は単調増加.

$\eta(u)=u^3+3u^2+3u-42$　　　$u\geqq3$のとき, $\eta(u)\geqq21>0$

したがって, $\zeta(u)$は, $u\geqq3$のとき, 正値で単調増加.

$\zeta(u)=u^4+4u^3+6u^2-168u-168$

$e^{c_1e}=5$ とおくと, $c_1e=\ln5$. $c_1=\frac{\ln 5}{e}=0.592\cdots$

$F(e^{\frac{\ln 5}{e}e})=-2.24\cdots<0$なので捨てる.

$e^{c_2e}=6$ とおくと, $c_2e=\ln6$. $c_2=\frac{\ln 6}{e}=0.659\cdots$

$F(e^{\frac{\ln 6}{e}e})=0.96\cdots>0$

$\eta(1)=-35$
$\eta(2)=-16$
$\eta(3)=21$
$\eta(4)=82$

$\zeta(1)=-325$
$\zeta(2)=-432$
$\zeta(3)=-429$
$\zeta(4)=-232$
$\zeta(5)=267$
$\zeta(6)=1200$

$\frac{\ln 5}{e}=0.59207911982639$

$e^{0.59207911982639e}=5.00000000000001$

$\frac{\ln 6}{e}=0.659151472253257$

$e^{0.659151472253257e}=6$

$\zeta(e^{\frac{\ln 5}{e}e})=267.000000000001$　　　$\zeta(e^{\frac{\ln 6}{e}e})=1200$

5と6のどちらが正解かと言えば, $F(x)>0$となる方だから, 6の方で, $c_2=\frac{\ln 6}{e}$.

またはPC数値計算により, $c=0.645811858+\varepsilon$ にとれば, $u\geqq e^{ce}$のとき, $f(u)>0$.

よって,

$t \geqq e^{ce}$ (c>1)のとき, F(t)>0.

$F(t)=e^{t/2}\cdot\ln(\ln(t))-t\cdot\ln(t)$

$\frac{\ln 6}{e}= 0.659151472253257$

c= 0.64581185765921008128

c=0.645811857659210082

$F(e^e)= 1911.8243922101005745$

$F(e^{0.64581185765921008128e})= 1.0461048749107227\times10^{-20}$

$F(e^{0.64581185765921008127e})= -6.344906386805405\times10^{-19}$ □

【補遺3】 (2.6) $x>e^4$ (>55)のとき, $I=\int_2^x\frac{du}{\sqrt{u}\log u}<\sqrt{x}\log(\log x)$ の証明.

$y=(\log(\log u))$で, $v=\log u$, $y=\log v$とおき, $\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}=\frac{1}{v}\frac{1}{u}=\frac{1}{u\log u}$ [合成関数の微分法(Chain Rule)]

$I=\int_2^x\frac{du}{\sqrt{u}\log u}=\int_2^x\frac{\sqrt{u}\,du}{u\log u}=\int_2^x\sqrt{u}(\log(\log u))'du$ と変形して部分積分法を行う.

$=\left[\sqrt{u}\log(\log u)\right]_2^x-\int_2^x\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du$

$f(x)=\frac{\ln(\ln(x))}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\ln(x)}$

$f(e^2)= 0.0936634779078236$

$\frac{\ln2}{2e}-\frac{1}{4e^2}=\frac{2e\ln2-1}{4e^2}= 0.0936634779078236$

$f(e^e)= 0.116302861781348$

$f(e^{e/2})= -0.0167395520128429$

$e^2= 7.38905\cdots$

$e^e= 15.15426\cdots$

第2項の積分$-\int_2^x\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du$は直接計算せずに, 次の不等式を利用し, 上から評価したい.

$\frac{1}{2u\log u}<\frac{\log(\log u)}{2u}<\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}} \Rightarrow -\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}<-\frac{\log(\log u)}{2u}<-\frac{1}{2u\log u}$とし, $-\int_2^{x_0}\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}$を捨てる.

$=\left[\sqrt{u}\log(\log u)\right]_2^x-\left(\int_2^{x_0}\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du+\int_{x_0}^x\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du\right)$

$<\left[\sqrt{u}\log(\log u)\right]_2^x-\left(\int_2^{x_0}\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du+\int_{x_0}^x\frac{du}{2u\log u}\right)$

$=\left[\sqrt{u}\log(\log u)\right]_2^x-\int_2^{x_0}\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}du-\int_{x_0}^x\frac{du}{2u\log u}$

$<\sqrt{x}\log(\log x)-\sqrt{2}\log(\log 2)-\int_{x_0}^x\frac{1}{2u\log u}du$

$=\sqrt{x}\log(\log x)-\sqrt{2}\log(\log 2)-\left[\frac{1}{2}\log(\log u)\right]_{x_0}^x$

$=\sqrt{x}\log(\log x)-\sqrt{2}\log(\log 2)-\frac{1}{2}\log(\log x)+\frac{1}{2}\log(\log x_0)$

$=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\log(\log x)+C<\sqrt{x}\log(\log x).$

したがって, $x>e^4>55$のとき, (2.6)が成り立つ.

$x>e^4>55$のとき, $I=\int_2^x\frac{du}{\sqrt{u}\log u}<\sqrt{x}\log(\log x).$ □

x_0は方程式$f(x)=\frac{\ln(\ln(x))}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\ln(x)}=0$

の解とする. $x_0= 4.12084463065996$

$2<x<x_0$のとき, $\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}<\frac{1}{2u\log u}$

$x_0<x$のとき, $\frac{1}{2u\log u}<\frac{\log(\log u)}{2\sqrt{u}}$

(参考) 電卓ソフトで, ln4≒ 1.386より,

$\frac{\ln(\ln(4))}{4}-\frac{1}{8\ln(4)}= -0.0085\cdots.$

x0= 4.12084463065996

$C=-\sqrt{2}\ln(\ln 2)+\ln(\ln\sqrt{x0})$

$= 0.173057423177252>0$

x_0を4で代用して計算して見ても,

$C=-\sqrt{2}\ln(\ln 2)+\ln(\ln\sqrt{4})$

$=(1-\sqrt{2})\ln(\ln2)= 0.1518\cdots>0$

が言える. $0<\ln2=0.6931<1$.

【補遺4】(2.7)の最右辺の式を(2.6)の$\sqrt{x}\log(\log x)$で割ると，？マークが外せる.

(2.7)
$$\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u} < \int_2^x \frac{du}{\log(u+2)\log u} \overset{?}{<} \Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$

$$\int_2^x \frac{du}{\log(u+2)\log u} \overset{\%}{<} \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} = \left[\mathrm{Li}(u) - \frac{u}{\log u}\right]_{u=2}^{u=x} \overset{*}{<} \left[\mathrm{Li}(u) - \frac{u}{\log u - 1} + 1\right]_{u=2}^{u=x}$$

$$\overset{\#}{=} \left|\left[\mathrm{Li}(u) - \pi(u)\right]_{u=2}^{u=x}\right| = \Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$

[注] * この不等号は，Littelwoodの定理2を適用するために容易に変形して得られる.

\# $[1]_{u=2}^{u=x} = 0$. Pintzの証明結果: $\pi(u) = \dfrac{u}{\log u - 1}$を使用. 前不等号より絶対値が必要になる.したがって，定理2(i)での $\Omega_{\pm}$が Ωとなる. これが正値である理由は初めの積分不等式%からも明らかである.

(2.6) $x > e^4$ (>55)のとき，$I = \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u} < \sqrt{x}\log(\log x)$

$$\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x} \div \left\{\sqrt{x}\log(\log x)\right\} = \frac{\log(\log(\log x))}{\log x \cdot \log(\log x)} = \frac{\log t}{e^t \cdot t} < 1$$

(最後の等式では,$x = e^{e^t}$と($t>1$) と置換した)であるから,

$$\int_2^x \frac{du}{\log(u+2)\log u} < \Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log(\log(\log x))}{\log x}\right).$$

[注]不等号%から1，2個目の積分は正値なので，絶対値が外せ，定理2(i)の $\Omega_{\pm}$も Ωと出来る.→『素数定理の誤差評価』のP2の1,8,9行目も参照のこと.

[Reference]

[JS] はじめての数論，Joseph H. Silverman/鈴木治郎訳,2001,東京書籍

[MW] Marek Wolf, The Skewes Number for Twin Primes : Counting Sign Changes of $\pi_2(x) - C_2\mathrm{Li}_2(x)$, 2011.

[WA] Wolfram Alpha, https://www.wolframalpha.com/

[MSC]https://www.shokabo.co.jp/column-math/column-math0007.html

[MW] https://cmst.eu/wp-content/uploads/files/10.12921_cmst.2011.17.01.87-92_Wolf_old.pdf

[BC] https://ja.wikipedia.org/wiki/ブルン定数

[WN2]素数定理の進展・下，W・ナルキエヴィッチ/中嶋眞澄訳，丸善，2013

[PNT] https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

[RS] https://ja.wikipedia.org/wiki/ランダウの記号

[HW] ハーディ・ライト,数論入門 I・II ,Springer,2001

[WKL] ttps://ja.wikipedia.org/wiki/リーマン予想: Littelwoodの定理の項，
真偽の議論の項

真偽の議論の項

[MSC]https://www.shokabo.co.jp/column-math/column-math0007.html

[WA] https://ja.wolframalpha.com/

[AEI] The Distribution of Prime Numbers, Cambrige,1934.