新世代完全数とその後

飯高 茂

2023 年 9 月 21 日

1　齋藤之理　の 新世代完全数

ユークリッドの完全数を a をベース p, 平行移動 m, 乗数 h について定義すると ($\overline{p}=p-1$), $q=\dfrac{hp^{e+1}-1}{\overline{p}}+m$ を素数と仮定すれば $a=p^eq$ はユークリッドの完全数として自然である. $p=2,h=1$ のとき, $\sigma(a)=2a-m$ となる.

約数関数の代わりにオイラー関数をもちいて完全数の一般化を行う.

$X=p^e$ を使う. $q=\dfrac{hpX-1}{\overline{p}}+m$ になるので $p\varphi(a)=X\overline{p}(q-1)=hpX^2+(m\overline{p}-p)X$.

$a=Xq$ により, $\overline{p}a=(hpX-1+m\overline{p}p)X=hpX^2+(-1+m\overline{p}p)X$.

かくして X についての 2 次方程式が 2 つあり共通根があるとき係数の間の関係式が得られる.

齋藤之理の $\varphi(a)^2$ 完全数の定義式だが複雑なのでこれを略して $p=2,m=0,h=1$ のときに限定する.

$4\varphi(a)^2+\varphi(a)-4a\varphi(a)-a+a^2=0$ が定義式になる.

表 1: Saito $\varphi(a)^2$ 完全数,$h=1,m=0,2,-12;p=2$

a	素因数分解				
$m=0$		$m=2$		$m=-12$	
3	3	10	$2*5$	15	$3*5$
6	$2*3$	136	2^3*17	24	2^3*3
21	$3*7$	32896	2^7*257	304	2^4*19
28	2^2*7			2535	$3*5*13^2$
465	$3*5*31$			127744	2^8*499
496	2^4*31				
8128	2^6*127				

古典的完全数では未発見の奇数解がでてくるのが実に面白い.

$m=0$ なら 奇数の解が $3,21=3*7,465=3*5*31$ でて来る.　この他に奇数解はあるか

また, 偶数解にユークリッドの完全数以外の解があるか

2^eQ と奇素数で書ける解を A 型解という. A 型解と仮定すると平行移動 m の解となることは齋藤が証明している.

$m=-12$ のとき $6Q$ の形の解 (3 以外の素数 Q)　はでて来ないがエイリアン解 $2^eQ,(Q=2^{e+1}-13))$ は A 型解なので全部でて来る. ここでも奇数解が 2 個ある.

2 計算式

3 $\varphi(\alpha)$ に関して

$A = h * 2^{e+1} - 1 + m$ を素数とし $\alpha = 2^e A$ を平行移動 m, 乗数 h のユークリッド完全数を次のように定める (By Saito)

便宜上 $X = 2^e$ とおくと, $A = 2hX - 1 + m$.

$\alpha = 2^e A = X(2hX-1+m) = 2hX^2+(m-1)X, 2\varphi(\alpha) = 2^e(A-1) = X(2hX-2+m) = 2hX^2+(m-2)X.$

これより, $\alpha - 2\varphi(\alpha) = X$ をえる.

$\alpha = 2hX^2 + (m-1)X$ に上の式を代入してできた式

$$\alpha = 2h(\alpha - 2\varphi(\alpha))^2 + (m-1)(\alpha - 2\varphi(\alpha)) \tag{4}$$

この式を満たす α を齋藤の $\varphi(\alpha)^2$ 完全数という.

$h = 1, m = 0$ のとき $\alpha = 2(\alpha - 2\varphi(\alpha))^2 - (\alpha - 2\varphi(\alpha))$.

3.1　2 変数化

$X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$　　(整数を許容する) とおいて, $\alpha = 2hX^2 + (m-1)X$ を満たすとき, α を φ^2 超完全数,X をそのパートナと呼ぶ.

$\alpha = 2^e Q, Q$: 素数なら,$X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 2^e(Q-(Q-1)) = 2^e$.

A 型解のパートナは 2 べき.

表 2: φ^2 超完全数,X をそのパートナ

a	素因数分解		
m= -20			
α		X	
36	$2^2 * 3^2$	12	$2^2 * 3$
98	$2 * 7^2$	14	$2 * 7$
176	$2^4 * 11$	16	2^4
1376	$2^5 * 43$	32	2^5
m= -18			
208	$2^4 * 13$	16	2^4
m= -16			
825	$3 * 5^2 * 11$	25	5^2
1504	$2^5 * 47$	32	2^5
m= -14			
50	$2 * 5^2$	10	$2 * 5$
272	$2^4 * 17$	16	2^4
m= -12			
24	$2^3 * 3$	8	2^3
304	$2^4 * 19$	16	2^4

表 3: φ^2 超完全数,X をそのパートナ

a	素因数分解		
m= -10			
40	$2^3 * 5$	8	2^3
1696	$2^5 * 53$	32	2^5
m= -8			
18	$2 * 3^2$	6	$2 * 3$
45	$3^2 * 5$	-3	-3
56	$2^3 * 7$	8	2^3
368	$2^4 * 23$	16	2^4
m= -4			
12	$2^2 * 3$	4	2^2
75	$3 * 5^2$	-5	-5
88	$2^3 * 11$	8	2^3
1888	$2^5 * 59$	32	2^5
m= -2			
20	$2^2 * 5$	4	2^2
104	$2^3 * 13$	8	2^3
464	$2^4 * 29$	16	2^4
1952	$2^5 * 61$	32	2^5
m= 0			
3	3	-1	-1
6	$2 * 3$	2	2
21	$3 * 7$	-3	-3
28	$2^2 * 7$	4	2^2
465	$3 * 5 * 31$	-15	$-3 * 5$
496	$2^4 * 31$	16	2^4

次の結果はオイラーの定理の類似である.

定理 1 $h = 1, m = 0$ となる φ^2 超完全数の特徴づけ.

すなわち, $X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$ に対して $\alpha = 2X^2 - X$ を満たす α が偶数なら $\alpha = 2^e Q, (Q = 2^{e+1} - 1$ *:素数)(ユークリッドの完全数)* になる.

Proof

仮定によって $\alpha = 2^e L, (L : \text{奇数})$ と書ける.

$X = \alpha - 2\varphi(\alpha)$ を以後用いる.

$$X = \alpha - 2\varphi(\alpha) = 2^e(L - \varphi(L)) = 2^e(\mathrm{co}\varphi(L))$$

それゆえ

$$\alpha = X(2X - 1) = 2^e \mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L) - 1)$$

$\alpha=2^eL$ を用い整理して

$$L=\mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L)-1)$$

L が素数なら $L=Q$ とおくと $Q=2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数で $\alpha=2^eQ$ はユークリッドの完全数.

L が合成数なら $d=\mathrm{co}\varphi(L),\delta=2^{e+1}d-1$ とおくと
$L=\mathrm{co}\varphi(L)(2^{e+1}\mathrm{co}\varphi(L)-1)=d\delta$.
d,δ は互いに素なので, $L=d\delta$ により

$$\varphi(L)=\varphi(d)\varphi(\delta)\le(d-1)(\delta-1).$$

$$d=\mathrm{co}\varphi(L)=d\delta-\varphi(d\delta)\ge d+\delta-1.$$

これは矛盾.

q.e.d. 縺汲して偶数ならこの場合はユークリッドの完全数. しかし奇数解　3,6,465　が計算例としてでてくる.

この場合はパートナ X が負になるのも面白い.

4 個目の奇数完全数があるかは不明である.

4　一般化定理

$X=\alpha-2\varphi(\alpha)$　が $\alpha=2hX^2+(m-1)X$ を満たすとき, 次の結果が成り立つ.

命題 1 $X=2^\varepsilon$ のとき　$\alpha=2^\varepsilon Q,(Q:$ 素数*)*

Proof

$X=2^\varepsilon=\alpha-2\varphi(\alpha)$ により α:偶数. $\alpha=2^eL(L:,$ 奇数$)$.
$X=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$
L は奇数なので $X=2^\varepsilon=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$ によって, $e=\varepsilon,\mathrm{co}\varphi(L)=1$.
L:素数なのでこれを　Q　と書けば, $\alpha=2^\varepsilon Q$:A 型解になる. **q.e.d.**
$\alpha=2hX^2+(m-1)X$ に代入すれば, $\alpha=2^\varepsilon Q=(2hX+m-1)X=(2h2^\varepsilon+m-1)2^\varepsilon,e=\varepsilon$ によって
$Q=2h2^e+(m-1)$.
一般に解 α を偶数と仮定する. $\alpha=2^eL$ $X=\alpha-2\varphi(\alpha)$ に代入すれば $X=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$
$d=\mathrm{co}\varphi(L)$ とおくと, $X=2^ed$, $2^eL=\alpha=2hX^2+(m-1)X=X(2hX+(m-1))=2^ed$.
ゆえに

$$L=d(2h2^ed\quad+(m-1))=d(2h2^ed+m-1)=d\delta,(\delta=2h2^ed+m-1).$$

i. $d=1$ なら L: 素数 Q で, $\alpha=2^eQ$.
ii. $d>1$ なら L: 合成数.　　$\delta=2h2^ed+m-1>1$.

$$L=d\delta$$

によって, $\varphi(L) = \varphi(d)\varphi(\delta) \le (d-1)(\delta-1)$.

$$d = \mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L) = d\delta - \varphi(d)\varphi(\delta) \ge d + \delta - 1.$$

これは矛盾.

以上において $\delta = 2h2^e d + m - 1 > 1$ とおいたところに問題が残る

実際, $h = 1, m = -28, \alpha = 28 = 2^2 * 3^2, X = 12$. すると $\delta = 2hX + m - 1 = 24 - 29 = -5 < 0$.