新世代完全数とその発展 後編 co$\varphi(a)$ の定理と応用

飯高 茂, 齋藤之理

2023 年 12 月 22 日

1 φ^2 完全数の定義

底 $p=2$ の場合.
h を奇素数とし　乗数という. m を整数としで平行移動のパラメータという.
$A=2^{e+1}h-1+m$ を素数と仮定する.
$\alpha=2^eA$ はユークリッドの完全数の一般化であるとみなせる.
オイラー関数 $\varphi(\alpha)$ を用いて $2\varphi(\alpha)=2^e(A-1)=\alpha-2^e$.
ここで $X=2^e$ とおくと,$A=2^{e+1}h-1+m=2hX-1+m$.
$2\varphi(\alpha)=\alpha-X$. ゆえに $X=\alpha-2\varphi(\alpha)$.
したがって $\alpha=2^eA=X(2hX-1+m)$ をえる.
そこで一般に次の定義を行う.

定義 1 $X=\alpha-2\varphi(\alpha), \alpha=X(2hX-1+m)$ を満たす α を齋藤の φ^2 完全数, X をそのパートナーという.

2 準 A 型解

一般に $\alpha=2^eQ^\varepsilon, (\varepsilon>1)$ と書ける解を準 A 型解という.
このとき $X=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^eQ^{\varepsilon-1}$.
ゆえに, $\alpha=X(2hX+m-1)$ によって, $Q=2hX+m-1=2^{e+1}hQ^{\varepsilon-1}+m-1$.
かくて 次の簡単な式 $(2^{e+1}hQ^{\varepsilon-2}-1)Q=1-m$ を得る.
$\varepsilon=2$ のとき, $(2^{e+1}h-1)Q=1-m$ となる.
たとえば, $h=1, e=1, m=-56$ なら $Q=19$, $h=1, e=1, m=-2*496$ なら $Q=331$.

3　基本定理

次の結果はかっては予想であったがいまや定理になった. ここで $\mathrm{co}\varphi(a) = a - \varphi(a)$ と定義されオイラー余関数という.

定理 1 *3* より大きい自然数 a について $\mathrm{co}\varphi(a)$ が a の約数なら a は素数べき.

Proof

仮定より $a = \mathrm{co}\varphi(a)c$ と自然数 c で書ける.

a を素因数分解する.

相異なる素因数 p_j によって $a = \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j}$ と書けるので.

$\varphi(a) = \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j-1}\overline{p_j}, (\overline{p_j} = p_j - 1)$,　$\Phi =$　$\prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j-1}$ とおくと

$$\mathrm{co}\varphi(a) = \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j} - \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j-1}\overline{p_j} = \Phi(\prod_{j=1}^{r} p_j - \prod_{j=1}^{r} \overline{p_j}).$$

$a = \mathrm{co}\varphi(a)c$ を思い出すと

$$a = \Phi\prod_{j=1}^{r} p_j = c\Phi(\prod_{j=1}^{r} p_j - \prod_{j=1}^{r} \overline{p_j}).$$

ゆえに

$$\prod_{j=1}^{r} p_j = c(\prod_{j=1}^{r} p_j - \prod_{j=1}^{r} \overline{p_j})$$

すなわち 証明のためには a の各素因子の指数は 1 としてよい. この知見は当時小学 6 年の但見東君による.

以下の証明では r についての数学的帰納法による. $r = 1$ なら $a = p_1, \overline{p_1} = p_1 - 1, c = p_1$.

$r > 1$ ならば矛盾を導く.

分かりやすさを優先して総積記号を使わないで次のように書く.

$$p_1p_2\cdots p_r = c(p_1p_2\cdots p_r - \overline{p_1}\,\overline{p_2}\cdots\overline{p_r}).$$

並べ方を工夫して p_1 を最大素因数とする.

p_1 は各 $\overline{p_j}$ と互いに素だから, $p_1|c$.

よって $c = p_1c'$ と書ける.

前の式に代入すると

$$p_2\cdots p_r = c'(p_1p_2\cdots p_r - \overline{p_1}\,\overline{p_2}\cdots\overline{p_r}).$$

$r \geq 2$ により

c' の素因子は $p_j, (j > 1)$ なのであらためて番号を付け替えて, $c' = p_2p_3\cdots p_s$ とし,$\pi_1 = p_2p_3\cdots p_s, \pi_2 = p_{s+1}\cdots p_r$ とする.

$s = r$ なら $\pi_2 = 1$ とする.

以上により $c = p_1c' = p_1\pi_1, a = c(a - \varphi(a))$.

$$a=\prod_{j=1}^{r} p_j = p_1\pi_1\pi_2 = p_1\pi_1(p_1\pi_1\pi_2-\overline{p_1}\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2)).$$

$$\prod_{j=2}^{r} p_j = \pi_1\pi_2, \prod_{j=2}^{r} \overline{p_j} = \varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2)$$

により

$$\pi_2 = p_1\pi_1\pi_2-\overline{p_1}\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2).$$

移項して

$$\pi_2(p_1\pi_1-1) = \overline{p_1}\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2).$$

しかし一般に 相異なる素数で同様につくられた場合

$$\pi_2(p_1\pi_1-1) > \overline{p_1}\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2).$$

が成立する.

実際

$$\pi_2(p_1\pi_1-1)-(p_1-1)\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2) = p_1(\pi_2\pi_1-\varphi(\pi_2)\varphi(\pi_1))-\pi_2+\varphi(\pi_2)\varphi(\pi_1).$$

$$=\pi_2(\pi_1-1)+(p_1-1)(\pi_2\pi_1-\varphi(\pi_2)\varphi(\pi_1))>0.$$

よって $\pi_2(p_1\pi_1-1) > \overline{p_1}\varphi(\pi_1)\varphi(\pi_2)$. したがって矛盾する.

q.e.d.

4 偶数解 α の続論

偶数解 α を奇数 L を用いて 2^eL と書くとき $X=\alpha-2\varphi(\alpha)=2^e\mathrm{co}\varphi(L)$. ここで $\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L)$.

$d=\mathrm{co}\varphi(L)$ とおくと, $X=2^ed, 2^eL=\alpha=X(2hX+(m-1))=2^ed(2^{e+1}hd+(m-1))$.

ゆえに $\delta=hd2^{e+1}+m-1$ とおけば $L=d\delta$. $d=\mathrm{co}\varphi(L)$ が L の約数なので定理 1 を使うと L は素数べき. よって $L=Q^{\varepsilon}$; $d=\mathrm{co}\varphi(L)=\mathrm{co}\varphi(Q^{\varepsilon})=Q^{\varepsilon-1}$.

$\delta=h2^{e+1}Q^{\varepsilon-1}+m-1$. $Q^{\varepsilon}=L=d\delta$ により,$\delta=Q$. ゆえに

$$Q=h2^{e+1}Q^{\varepsilon-1}+m-1.$$

とくに,$\varepsilon=1$ のときは, $d=1, Q=h2^{e+1}+m-1;\alpha=2^eQ$. これは A 型解で完全数の定義に戻る . そこで先祖返りの場合になる.

$\varepsilon=2$ ならば $Q=\delta=h2^{e+1}Q+m-1$.

ゆえに $1-m=\delta=(h2^{e+1}-1)Q$.

表 1: 準 A 型解 $2Q^2$; $1-m=(4h-1)Q, e=1$

$h=1;Q$	3	5	7	11	13	17	19
$-m=3Q-1$	8	14	20	32	38	50	56
$-m/2$	4	7	10	16	19	25	28
$h=3;Q$	3	5	7	11	13	17	19
$-m=11Q-1$	32	54	76	120	142	186	208
$-m/2$	16	27	38	60	71	93	104

$e=1$ のとき例をあげる.

偶数解は A 型および準 A 型として解が特定された. 奇数解の研究が待たれるところだがパソコンで調べてみた.

最後の素因子を除外するとフェルマ素数が目立って多い. これは注目に値する.

表 2: 奇数 φ^2 完全数解の例 $h=3$

α	素因数分解	X	素因数分解
$m=-96$			
1755	3^3*5*13	27	3^3
$m=-92$			
6885	3^4*5*17	-27	-3^3
$m=-76$			
285	$3*5*19$	-3	-3
$m=-56$			
495	3^2*5*11	15	$3*5$
$m=-40$			
855	3^2*5*19	-9	-3^2
$m=-36$			
5313	$3*7*11*23$	33	$3*11$
$m=-24$			
975	$3*5^2*13$	15	$3*5$
$m=-8$			
15	$3*5$	-1	-1
$m=-4$			
1425	$3*5^2*19$	-15	$-3*5$

5 異種の場合

完全数の式を構成するとき平行移動は 1 つだが, 乗数のつけ方は決して確定したものではない.

$A = h2^{e+1} - 1 + m$ が素数としたが, $a = 2^e$ のとき $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ なので, $A = h\sigma(a) + m = h2^{e+1} - h + m$ は素数とした方が自然な感じもする.

このとき $\alpha = 2^e A$ をユークリッド完全数の一般化と考えてみると,

$2\varphi(\alpha) = 2^e(A-1) = \alpha - 2^e$ が成り立つ.

$X = 2^e$ とおけば, $\alpha = XA, 2\varphi(\alpha) = \alpha - X$.

さらに, $A = h(2^{e+1} - 1) + m = h(2X-1) + m = 2hX - h + m$ も成り立つ.

そこで $X = \alpha - 2\varphi(\alpha), \alpha = XY, (Y = 2hX - h + m)$ が成り立つとき, α を第 2 種 φ^2 完全数, X ををそのパートナという. 以前の定義を第 1 種するとこれらの定義はほとんど同じなので結果も大して変わらないと思われる. 実はこのほかに第 3 種やもっと複雑な場合もありこれらを異種の場合という. 研究材料に事欠かかないのである.

具体例をあげよう.

表 3: 第 2 種 φ^2 完全数の例 $h=3, m=-66,-38,-34$

α	素因数分解	X	素因数分解
$m=-66$			
36	2^2*3^2	12	2^2*3
$m=-38$			
56	2^3*7	8	2^3
855	3^2*5*19	-9	-3^2
4832	2^5*151	32	2^5
93056	2^7*727	128	2^7
$m=-34$			
88	2^3*11	8	2^3
944	2^4*59	16	2^4
5313	$3*7*11*23$	33	$3*11$
22208	2^6*347	64	2^6

A 型解, 準 A 型解, 奇数解 が出ている. 奇数解 $855=3^2*5*19$ は最後の素因子 19 を除外すると,3,5 はフェルマ素数.

しかしながら $5313=3*7*11*23$ は異形で注目に値する.