Hartshorne の等式とその応用2

飯高 茂 (学習院大学名誉教授)*

概　要

S を非特異有理曲面, D はその上の非特異代数曲線とする．対 (S,D) の極小モデルについて Hartshorne の等式が成立しその応用として種数 g の不変数 ω による評価ができる．それは (4,1) 種数の評価を与える．

1. 混合多種数

S は非特異有理曲面, D はその上の非特異代数曲線とし, このような対 (S,D) の双有理幾何を考える．$S-D$ の対数的小平次元として対の小平次元 $\kappa[D]$ が定義されるので $\kappa[D]=2$ を以下仮定する．

(S,D) は相対的極小モデルなら極小モデルとなることが証明される．そこで (S,D) は極小モデルとする. 混合多種数 (mixed plurigenera) $P_{ma}[D]=\dim|mK_S+aD|+1 (m\geq a)$ を定義する． $Z=K_S+D$ とおくとき

$P_{2,1}[D]=Z^2-\overline{g}+1=A+1$． ここで $\overline{g}=g-1, A=Z^2-\overline{g}$, および $P_{3,1}[D]=3A-\alpha+1=\Omega-\omega+1$ が成り立つ．

ここで $\alpha=4\overline{g}-D^2$, $\Omega=(3Z-2D)\cdot Z=3Z^2-4\overline{g}$, $\omega=3\overline{g}-D^2$.

2. $\#-$ 極小性

極小対 (S,D) は, S が射影平面でないとき, Hirzebruch 曲面 Σ_B の $\#-$ 極小対 (Σ_B,C) からその最短非特異化として得られる（対の極小モデルの構成定理）.

$C\sim\sigma\Delta_\infty+eF_c$ で (次数にあたる) 不変数 σ,e を定め, さらに C の特異点を無限に近い特異点を含めて考えそれらの重複度を大きい方から順に $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r$ とする．このとき (Σ_B,C) の**タイプ**を $[\sigma*e,B;\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r]$ と定義する．(Σ_B,C) の $\#-$ 極小性の条件は次の通り:

- $p=\sigma-2\nu_1\geq 0$. $B=0$ なら $e-\sigma=u\geq 0$,; $B=1$ なら $e-\sigma-\nu_1=u\geq 0$, ; $B>1$ なら $e-B\sigma=u\geq 0$.

3. Hartshorne の等式

$2D+\sigma K_S$ と D または Z との交点数の評価から有用な不等式が得られる. (Hartshorne の補題) 今回は精密化した等式で種数の混合多種数による評価をする．

$\tilde{\theta}_2=(2C+\sigma K_0)\cdot C$ とおくと $(2D+\sigma K_S)\cdot D=2\sigma\overline{g}-(\sigma-2)D^2$ により

$$(\sigma-2)\omega-(\sigma-6)\overline{g}=2\sigma\overline{g}-(\sigma-2)D^2=\tilde{\theta}_2+pY+2\tilde{\mathcal{Z}}. \qquad (1)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30
キーワード：平面代数曲線, 混合多種数, 双有理不変数
* 〒183-0052 東京都府中市新町 3-2-21
e-mail: iitakashigeru@gmail.com
web: http://iitakashigeru.web.fc2.com/

ここで $X=\sum_{j=1}^{r}\nu_j^2, Y=\sum_{j=1}^{r}\nu_j, \widetilde{\mathcal{Z}}=\nu_1 Y-X$.
すると, $\tilde{\theta_2}=\sigma(\widetilde{B}-2\sigma)$.

- $B\neq 1$ または $B=1$ で $2e-3\sigma\geq 0$ のとき $\mathrm{RH}_{(+)}$ 型という.
- $B=1$ で $2e-3\sigma<0$ のとき $\mathrm{RH}_{(-)}$ 型という.

$\mathrm{RH}_{(+)}$ 型ならば $\tilde{\theta_2}\geq 0$. 実際, $B=1$ のとき $\widetilde{B}-2\sigma=2e-3\sigma$ なので $2e-3\sigma\geq 0$ なら $\tilde{\theta_2}\geq 0$.

$\mathrm{RH}_{(-)}$ 型 のときは $L=-(2e-3\sigma)>0$ とおくと $\tilde{\theta_3}=(3C+eK_0)\cdot C$ は $\tilde{\theta_3}=L(u+\nu_1)\geq 3L>0$ を満たし

$$(e-3)\omega-(e-9)\overline{g}=2e\overline{g}-(e-3)D^2=\tilde{\theta_3}+(p+u)Y+3\widetilde{\mathcal{Z}}. \tag{2}$$

(1),(2), などを **Hartshorne** の等式という.

4. g の ω による評価

$\sigma\geq 8, \nu_1\geq 3$; または $e\geq 12, \nu_1\geq 3$ を仮定する. $F_4=3\omega-\overline{g}$ とおくとき,

$$F_4=\frac{1}{2}(3(D+3K_S)\cdot D-(D+K_S)\cdot D)=(D+4K_S)\cdot D.$$

Theorem 1 次の場合を例外として $3\omega-10\geq\overline{g}\geq -1$:

1. $\nu_1=3$.
   (a) $[8*8;3^{t_3},2^{t_2}]$, $F_4=3t_3+4t_2; 3t_3+4t_2\leq 9$.
   (b) $[8*9;1]$, $F_4=8$.
2. $\nu_1=4$.
   (a) $[8*8;4^{t_4},3^{t_3},2^{t_2}]$, $F_4=3t_3+4t_2; 3t_3+4t_2\leq 9, 49-(6t_4+4t_3+t_2)\geq 0$.
   (b) $[8*9;4^{t_4}]$, $F_4=8, t_4\leq 9$.
3. $\nu_1=5$.
   (a) $[10*10;5^7,4], F_4=5$; $[10*10;5^7,4,3], F_4=8,$; $[10*10;5^7,4,2], F_4=9,$
   (b) $[10*10;5^7], F_4=5,$; $[10*10;5^7,3], F_4=8,$; $[10*10;5^7,2], F_4=9$.
4. $\nu_1=6$. $[12*12;6^7,5]$, $F_4=7, \omega=4, \overline{g}=5$.
5. $\nu_1=7$. $[14*14;7^7,6]$, $F_4=9, \omega=5, \overline{g}=6$.
6. $\nu_1=7$. $[14*14;7^7,6,4]$, $F_4=9, \omega=3, \overline{g}=0$.