約数関数の陪関数について

飯高 茂　(学習院大学名誉教授)*

概　要

約数関数 $\sigma(a)$ の陪関数 $\tilde{\sigma}(a)$ を導入しその基本性質を調べる.

1. 約数の和関数と陪関数

始めにオイラー陪関数の定義を書く. 自然数 a の相異なる素因子の個数 $s = s(a)$ と書きその最小素因子を q_1 と書く. $\frac{\varphi(a)}{2^s}$ を不変数として認定し $\tilde{\varphi}(a)$ と書き**オイラー陪関数** と呼ぶ. オイラー陪関数の値は半整数である. 今回はこの立場から別の陪関数を次のように導入する.

約数の和関数 $\sigma(a)$ の陪関数は $\frac{\sigma(a)}{2^s}$ で定義され $\tilde{\sigma}(a)$ と書く. この関数の値は正の有理数である.

陪関数について評価式が成り立つ.

Theorem 1 $2 \leq s(a)$ とするとき $2\tilde{\sigma}(a) < a - 2$ を満たす. ただし, $s = 2, q_1 = 2$ は除外する.

一般的な次の結果がある.

Theorem 2 自然数 a が自然数 m について $2\tilde{\sigma}(a) - a = m$ を満たし $a = 2^e q^f$ と書けるとする. このとき $\dfrac{(2m+1)(q-1)}{q^f - 1}$ は整数である.

とくに, $m = -2, -1, 0, 1, 2$ のとき $f = 1$.

これより次の定理が得られる.

Theorem 3 $2\tilde{\sigma}(a) - a = -1$ を満たすとき $a = 2^e p$ と書ける. ここで $p = 2^{e+1} + 1$ は素数である.

このとき $e + 1$ は 2^m となる. $F_m = 2^{2^m} + 1$ はフェルマー数.

偶数完全数 a はオイラーによれば $a = 2^e p, 2^{e+1} - 1 = p (p:$ 素数$)$ と書ける.

$$\tilde{\sigma}(a) = \tilde{\sigma}(2^e p) = \frac{(2^{e+1}-1)(p+1)}{4} = \frac{p2^{e+1}}{4} = \frac{a}{2}$$

ゆえに $2\tilde{\sigma}(a) - a = 0$.

この逆が成立する.

Theorem 4 $2\tilde{\sigma}(a) - a = 0$ を満たすとき $a = 2^e p$ と書ける. ここで $p = 2^{e+1} - 1$ は素数である.

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30
キーワード：オイラー関数, 約数, 完全数

* 〒183-0052 東京都府中市新町 3-2-21
e-mail: iitakashigeru@gmail.com
web: http://iitakashigeru.web.fc2.com/

すなわち a は偶数完全数である.

完全数の定義は $\sigma(a)=2a$ を満たす自然数 a である. $2\tilde{\sigma}(a)=a$ は陪関数による偶数完全数の定義と考えて良い.

$2\tilde{\sigma}(a)-a=-1,0$ の場合は分かった. $2\tilde{\sigma}(a)-a=1$ の場合は擬素数になる.

2. 擬素数

$a=p$ が素数の場合, $\tilde{\sigma}(p)=\frac{p+1}{2}$ なので $2\tilde{\sigma}(p)-p=1$ が成り立つ. よって a が素数であれば $2\tilde{\sigma}(a)-a=1$ が成り立つ.

$2^{e+1}-3$ が素数 p になる場合, $2^e\cdot p$ を指数 e の**擬素数**とよび $\mathbf{p}_e$ で記す. $a=\mathbf{p}_e$ とおくと $2\tilde{\sigma}(a)-a=1$.

Theorem 5 自然数 a が $2\tilde{\sigma}(a)=a+1$ を満たすとき a は素数または指数 e の**擬素数**となる.

表 1: 擬素数の表

e	$2^{e+1}-3=p$	$2^e\times p=a$
2	$2^3-3=5$	$2^2\times 5=20$
3	$2^4-3=13$	$2^3\times 13=104$
4	$2^5-3=29$	$2^4\times 29=464$
5	$2^6-3=61$	$2^5\times 61=1952$
8	$2^9-3=509$	$2^8\times 509=130304$
9	$2^{10}-3=1021$	$2^9\times 1021=522752$
11	$2^{12}-3=4093$	$2^{11}\times 4093=8382464$
13	$2^{14}-3=16381$	$2^{13}\times 16381=134193152$

意外にも多くの擬素数がある. $e=2,3,4,5$ と最初の 4 つが出てくるところがすごい.

3. 付録

自然数 e があり $a-2^{e+1}\tilde{\varphi}(a)=-1$ を満たすなら a はフェルマー素数積となるであろう. これを予想とする. また e を予想の指数という.

Theorem 6 予想の指数 $e\leq 5$ なら予想は正しい.

(期待) $a-2\varphi(a)=-1$ を満たすなら a はフェルマー素数積となる.

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう, 月刊誌『現代数学』に連載中 2014 年 現代数学社.