究極の完全数とφ完全数

飯高 茂　(学習院大学名誉教授)*

概　要

究極の完全数とφ完全数 を導入しその基本性質を調べる.

1. 究極の完全数とその平行移動

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P **究極の完全数**と呼ぼう. このとき $q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ となる.

$\overline{P} = P - 1$ としている.

究極の完全数を整数 m だけ平行移動する.

$q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ は素数として$a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ.

1.0.1. 例

$[p = 5, m = 0]$ の例

表 1: $P = 5, m = 0$

e	素因数分解	a
2	$5^2 * 31$	775
6	$5^6 * 19531$	305171875
10	$5^{10} * 12207031$	119209287109375
12	$5^{12} * 305175781$	74505805908203125

1.0.2. 基本問題

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

になり, $q + 1 = \frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}} + m$ を用いて次のように式変形する.

$\overline{P}\sigma(a) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$

$= \overline{P}(q - m)(q + 1)$

$= \overline{P}q(q + 1) - \overline{P}m(q + 1)$

$= \overline{P}q(\frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}} + m) - \overline{P}m(q + 1)$

$= Pa + q(P - 2) - m(P - 1)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30

キーワード：オイラー関数, 約数, 完全数

* 〒 183-0052 東京都府中市新町 3-2-21

e-mail: `iitakashigeru@gmail.com`

web: `http://iitakashigeru.web.fc2.com/`

これより

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P-1). \qquad (1)$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.
例えば
$P=3$ なら

$$2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a) - 2m.$$

1.1. 究極の完全数の基本問題

(1) を満たすとき
素数 $q = \frac{P^{e+1}-1}{P} + m$ を基にして $a = P^e q$
とかけるか? という問題を究極の完全数の基本問題と言う.
これが一般に成立するはずはなくとりあえず反例を探すことになる.

2. φ 完全数

究極の完全数の定義を参考にユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って究極の完全数に類似の概念を定義しよう.

素数 $p, e \geq 2$ に対して $\varphi(p^e)$ は合成数なので完全数の定義をそのままは使えない.

そこで, 1 を加えて $\varphi(p^e)+1$ が素数 q になるとき $a = p^e q$ をもって p を底とする φ **完全数**と定義する.

$\varphi(p^e)+1+m$ が素数 q になるとき $a = p^e q$ を (p を底とする) m だけ平行移動した φ 完全数の定義とする.

これは次の方程式を持つ:

$$p\varphi(a) = \overline{p}a - p\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + pm. \qquad (2)$$

次の定理にまとめられる.

Theorem 1 $m=0$ のとき

$$p\varphi(a) = \overline{p}a - p\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

を満たす解は微小解または φ 完全数である.

$m \geq 0$ のときは同様の結果が成り立つ.

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう, 月刊誌『現代数学』に連載中 2014 年 現代数学社.