スーパー完全数の平行移動

飯高 茂

概 要

スーパー完全数 は D.Suryanaryana により $\sigma(\sigma(a))=2a$ を満たす数 として定義された (1969 年) 与えられた m に対して　$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ を平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言い, 解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

1　スーパー完全数

$a=2^e$ とする. $q=2^{e+1}-1+m$ が素数になるとき q は $\sigma(q)=q+1$ を満たし, $\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m)$ である.

定義により $q+1=2a+m$　であるから　$\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$. したがって次の式を得る.

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$$

a を未知数とみて, この式を平行移動 m の (広義の) スーパー完全数の方程式と言い, この解 a を平行移動 m の広義のスーパー完全数という.

命題 1 $a=2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q=2^{e+1}-1+m$ は素数となる.

とくに 2^eq は平行移動 m の狭義の完全数になる.

命題 2 $a=2^e$ で $q=2^{e+1}-1+m$ が素数なら a は平行移動 m のスーパー完全数となる.

定義 1 平行移動 m のスーパー完全数 a に対して $q=2a-1+m$ を擬メルセンヌ数という.

1.1　$m = -28$ のときのスーパー完全数

表 1: $m = -28$ スーパー完全数

a	素因数分解	$p = a/7$	$2p - 5$
26	$2 * 13$		
35	$5 * 7$	5	5
77	$7 * 11$	11	17
98	$2 * 7^2$	14	23
107	107		
119	$7 * 17$	17	29
128	2^7		
161	$7 * 23$	23	41
203	$7 * 29$	29	53
329	$7 * 47$	47	89
371	$7 * 53$	53	101
413	$7 * 59$	59	113

この場合, いろいろな解がある.

- 2 べきの解 2^7
- 偶数解だが 2 べきでない解 $26 = 13 * 2, 98 = 2 * 7^2$
- 素数解. 107 (一匹狼というべき存在.)
- $7p$ の形の解, ここで $p, q = 2p - 5$ はともに素数.(スーパー双子素数)

命題 3 $m = -28$ に対し,p および $q = 2p - 5$ が素数のとき, $a = 7p$ は平行移動 -28 ときのスーパー完全数.

命題 4 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$, $m = -28$ のとき $a = 7p, (p \not\equiv 0 \bmod 7)$ と書けるなら, $p, q = 2p - 5$ はともに素数である.

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (I)(II)(III)(IV)(V) 2016,2017,2018 年 現代数学社.