オイラーの$(*)$完全数

飯高 茂　(学習院大学名誉教授)*

概　要

オイラーの $(*)$ 完全数 を導入しその基本定理を述べる.

1. $(*)$ 完全数

春の学会で底が素数 P のときのオイラーの φ 完全数の概念を導入した. とくに $P=2$ のとき φ 完全数の方程式は $a-2\varphi(a)=2(q-m-1)$ となりこれから a : は偶数 がでてくる. ここで $q=\mathrm{Maxp}(a)$:最大素因子.

$m \geq -2$ のとき基本定理ができた. また $m<0$ のときは方程式を解くアルゴリズムができた.

$m=-2$ のときの方程式は $a-2\varphi(a)=2(q+1)$ となり解は $2^e q$

$(q=2^{e-1}-1, q$:素数) の形になりこれはユークリッドの完全数の4倍.

ここでは4倍になるのを嫌って新たにオイラーの $(*)$ 完全数を導入する.

定義:底が素数 P のとき $q=\varphi(P^{e+1})+1+m, (e>1)$ が素数になる場合 $a=P^{e-1}q$ をオイラーの $(*)$ 完全数とよぶ.

$q=\varphi(P^{e+1})+1+m=P^e\overline{P}+1+m, \varphi(a)=\varphi(P^{e-1}q)=P^{e-2}\overline{P}(q-1)$ に注意すると

$P^2\varphi(a)=P^e\overline{P}(q-1)=P^eq\overline{P}-P^e\overline{P}=P\overline{P}a-(q-1-m)$.

$\mathrm{Maxp}(a)=q$ によれば次の方程式を得る.

$$P^2\varphi(a)=P\overline{P}a-\mathrm{Maxp}(a)+(1+m). \tag{1}$$

2. オイラーの $(*)$ 完全数の方程式の解

$P=2$ の場合の方程式は $4\varphi(a)=2a-\mathrm{Maxp}(a)+(1+m)$.

以後 $q=\mathrm{Maxp}(a)$ とおく. 方程式は

$4\varphi(a)-2a=m+1-q$

になるため, $m+1-q$ は偶数になる. よって, $q>2$ のとき m : 偶数である.

この方程式において m : 奇数と仮定するとき, q : 偶数になるので $q=2$. このとき解は $a=2^e$ になり $m=1$.

$m=-2$ のときの数表は次にあり, $(*)$ 完全数の方程式は $4\varphi(a)=2a-\mathrm{Maxp}(a)-1$. ユークリッドの完全数 6,28,496,8128 が並んでいる.

この式から a :偶数 は導けそうもないので a :偶数 を仮定する.

$P=2, m=-2$ の場合, オイラー $(*)$ 完全数の方程式の解 a は a が偶数の場合, ユークリッドの完全数になる.

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30
キーワード：オイラー関数, 約数, 完全数

* 〒183-0052 東京都府中市新町 3-2-21
e-mail: iitakashigeru@gmail.com
web: http://iitakashigeru.web.fc2.com/

これはオイラーが示した「偶数の完全数はユークリッドの完全数になる」という結果のオイラー $(*)$ 完全数の場合の類似である.

表 1: $[P=2, m=-2], a \leq 1000000$ での解の表

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6	$[2,3]$	2
28	$[2^2,7]$	12
496	$[2^4,31]$	240
8128	$[2^6,127]$	4032

2.1. オイラー $(*)$ 完全数の解

一般には 素数 P に対して, m だけ平行移動したオイラーの $(*)$ 完全数 a は $a=P^{\varepsilon}q$ となる. ここで $q=\varphi(P^e)+1+m$ は素数. すると

$$P^2\varphi(a)-P\overline{P}a=m+1-\mathrm{Maxp}(a).$$

「$\mathrm{Maxp}(a)-(1+m)\equiv 0 \mod P^2$ を満たすとき $(*)$ 条件を満たす」といい, 以下この場合を主な研究対象とする.

Theorem 1 $(*)$ 条件を満たすと仮定する.

$$P^2\varphi(a)-P\overline{P}a=m+1-\mathrm{Maxp}(a) \tag{2}$$

の解 a は $m\geq -2$ のとき $q=\varphi(P^{\varepsilon})+1+m$: 素数, $a=P^{\varepsilon}q$ となる.

$(*)$ 条件を満たさない場合の例 (*) を挙げる.

表 2: $[P=2, m=0]$

a	素因数分解	q	$q-1$
10	$[2,5]$	5	4
136	$[2^3,17]$	17	16
165	$[3,5,11]$	11	10 *
15561	$[3^2,7,13,19]$	19	18 *
16215	$[3,5,23,47]$	47	46 *
32896	$[2^7,257]$	257	256
1600125	$[3,5^3,17,251]$	251	250 *

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (I)(II) 2016 年 現代数学社.