オイラーの ϕ 完全数

飯高 茂　(学習院大学名誉教授)*

概　要

オイラーの φ 完全数 を導入しその基本定理を述べ証明する.

1. 究極の完全数とその平行移動

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P の **究極の完全数**と呼ぼう. このとき $q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ となる. ここで $\overline{P} = P - 1$,$\sigma(a)$: a の約数の和.

究極の完全数を整数 m だけ平行移動する. $q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ.

これは次式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P-1). \tag{1}$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

(1) を満たすとき

素数 $q = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ を基にして $a = P^e q$ とかけるか?

という問題を究極の完全数の基本問題と言う.

この問題は反例が多くあるが部分解でも解ければ価値がある.

2. φ 完全数

究極の完全数の定義を参考にユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って類似した概念を定義しよう.

$\varphi(P^e)$ は合成数なので完全数の定義をそのままは使えない. そこで, 1 を加えて $\varphi(P^e) + 1$ が素数 q になるとき $a = P^e q$ をもって P を底とする φ **完全数**と定義する.

m だけ平行移動した φ 完全数の定義は次の通り.

$\varphi(p^e) + 1 + m$ が素数 q になるとき $a = p^e q$ を (p を底とする) m だけ平行移動した φ 完全数の定義とする. 特にこれを満たす a を (φ, m) 完全数とも言う.

$$\varphi(a) = \varphi(p^e q) = p^{e-1}\overline{pq} = p^e\overline{p}(q-1)/p = p^e q\overline{p}/p - p^{e-1}\overline{p} = \overline{p}a/p - (q-1-m).$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a) = q$ に注意し

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30

キーワード：オイラー関数, 約数, 完全数

* 〒183-0052 東京都府中市新町 3-2-21

e-mail: iitakashigeru@gmail.com

web: http://iitakashigeru.web.fc2.com/

表 1: 2 を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	12	$2^2 * 3$	4
3	40	$2^3 * 5$	16
5	544	$2^5 * 17$	256
9	131584	$2^9 * 257$	65536
17	8590065664	$2^{17} * 65537$	4294967296

$$p\varphi(a) = \overline{p}a - p\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + pm. \tag{2}$$

が得られた.

これがm だけ平行移動した φ 完全数の方程式 $(*)$ である.

3. 定理

φ 完全数の方程式を解く問題をφ 完全数の基本問題と言う. この問題は意外なことにほぼ完全に解けてしまう.

次の補題に注目する.

Lemma 1 $a > 1$ が素数でないとき

$$a - \varphi(a) \geq \mathrm{Maxp}(a)$$

Theorem 1 素数 P に対し, $m \geq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

を満たす解は

1. $m = 0$ のとき微小解 $a = Pq(P > q).q:$ は素数.
2. $m = P - 1$ のとの微小解 $a = P^e$.
3. $e > 1$ のとき a は$(\varphi, m)-$ 完全数
4. $e = 1$ のとき $a = Pq$, $q = P + m$ は素数.

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう, 月刊誌『現代数学』に連載中 2015,2014 現代数学社.