劣完全数の基本性質

飯高 茂

概 要

与えられた整数 m と奇素数 P について $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$ を満たす自然数 a を底 P, 平行移動 m の劣完全数という. その基本定理を述べる.

1 劣完全数

与えられた整数 m と奇素数 P に対し $q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, この q をサブ素数 (subprime number) という. これは次の式を満たす. $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$. ($\overline{P} = P - 1$ とおく)

これを方程式とみてその解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) という.

命題 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = 0$ の広義の劣完全数は $P = 3$ の場合の $a = 2$ に限る.

命題 2 $P \geq 3$, 平行移動 $m = \mu\overline{P} > 0$ の劣完全数は存在しない.

定理 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数は $P = 3, a = 2^2$.

たとえば $P = 3$ のとき m が偶数ならそれを満たす劣完全数は決定できる.

$2\sigma(a) = 3a - m, (m = 2\mu)$ を満たす a とその素因数分解を例示する.

```
m=-74;factor(36)=2^2*3^2
m=-72;factor(56)=2^3*7,factor(116)=2^2*29,factor(242)=2*11^2
m=-66;factor(42)=2*3*7
m=-62;factor(64)=2^6
m=-60;factor(40)=2^3*5,factor(92)=2^2*23
m=-54;factor(30)=2*3*5
m=-52;factor(76)=2^2*19
m=-48;factor(24)=2^3*3,factor(68)=2^2*17,factor(98)=2*7^2
m=-48; factor(24)=2^3*3, factor(68)=2^2*17, factor(98)=2*7^2
m=-40; factor(52)=2^2*13
m=-36 ; factor(44)=2^2*11, factor(50)=2*5^2
m=-30; factor(32)=2^5
m=-28; factor(28)=2^2*7
m=-24;factor(18)=2*3^2,factor(20)=2^2*5
m=-20; factor(12)=2^2*3
m=-14;factor(16)=2^4
```

```
m=-6;
factor(6)=2*3,factor(8)=2^3,factor(10)=2*5,factor(14)=2*7

(factor(2p)=2*p が無限に続く.p:奇素数)

m=-2 ;factor(4)=2^2
m=0; factor(2)=2
```

証明には μ を与える公式を使う. (ユークリッド余関数: $\mathrm{co}\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha) - \alpha$)

$$\mu = (2^{j+1} - 1)co\sigma(\alpha) + (2^{j-1} - 1)\alpha.$$

2 概完全数

m が奇数の場合は複雑になる.

$m = 1$ のとき, 累乗 $a = P^e$ は解になるが例外的な解がでることがある. これらを概完全数 (almost perfect numbers) という. 概完全数の決定問題は解けていない.

ここで, 奇素数 P に対して $D = P^2 - P + 1$ とおき因数分解を行い, $(q_0 r_0)^2 = D$ を満たす r_0, q_0 に対して $r = r_0 + \overline{P}, q = q_0 + \overline{P}$ がともに素数となる, r, q があれば $a = rq$ が解になる.

表 1: 概完全数の表

P	$D = P^2 - P + 1$	a	a の素因数分解	$\sigma(a)$
$P = 5$	$[3, 7]$	77	$7 * 11$	96
$P = 11$	$[3, 37]$	611	$13 * 47$	672
$P = 17$	$[3, 7, 13]$	2033	$19 * 107$	2160
		1073	$29 * 37$	1140
$P = 31$	$[7^2, 19]$	6031	$37 * 163$	6232
$P = 37$	$[31, 43]$	5293	$67 * 79$	5440
$P = 41$	$[3, 547]$	25241	$43 * 587$	25872
$P = 47$	[3,7,103]	9983	$67 * 149$	10200
$P = 73$	[7,751]	65017	$79 * 823$	65920
$P = 89$	[3,7,373]	50249	$109 * 461$	50820

たとえば $a = 77$ のとき
$4\sigma(a) - 5a = 4 * 96 - 5 * 77 = 384 - 385 = -1$

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (I)(II)(III) 2016,2017 年 現代数学社.