乗数3付きの第3種Euler超完全数のダブルB型解について

宮本憲一

2025年1月21日

奇素数 h をとり、$a = h2^e$ とおけば
$2\varphi(a) = (h-1)2^e$ となり両辺に h をかけると $2h\varphi(a) = (h-1)a$
$A = 2^e h + m + 1$ を素数と仮定し $(h-1)$ をかけると
$(h-1)A = 2h\varphi(a) + (h-1)m + (h-1)$ となり $\varphi(A) = a + m$ となる。
以上のことを忘却の彼方に忘れ次の定義をする
（定義）
$(h-1)A = 2h\varphi(a) + (h-1)m + (h-1)$、$\varphi(A) = a + m$
を満たす a を m だけ平行移動した第3種Euler超完全数といい、A そのパートナーという。
ここでダブルB型解とは α,β が互いに素な定数で
$a = \alpha * p, A = \beta * q$（$p,q$ は素数）
が複数個あるものをいう。

$h=3$ のとき第 3 種 Euler 超完全数は
$2A=6\varphi(a)+2m+2,\varphi(A)=a+m$ つまり
$A=3\varphi(a)+m+1,\varphi(A)=a+m$
となる。
このとき $m=-22,-19,-16,-10,-9,-7$ の場合を考察する。

表 1: $h=3,m=-22$

a	素因数分解	A	素因数分解
24	2^3*3	3	3
40	2^3*5	27	3^3
46	2*23	45	3^2*5
58	2*29	63	3^2*7
82	2*41	99	3^2*11
94	2*47	117	3^2*13
118	2*59	153	3^2*17
184	2^3*23	243	3^5
202	2*101	279	3^2*31
262	2*131	369	3^2*41
274	2*137	387	3^2*43
298	2*149	423	3^2*47
334	2*167	477	3^2*53
382	2*191	549	3^2*61
454	2*227	657	3^2*73
514	2*257	747	3^2*83
622	2*311	909	3^2*101

$m=-22$
$A=3\varphi(a)-21$、$\varphi(A)=a-22$ より
A は 3 の倍数より $A=3^fM$（M は 3 の倍数でない）とかける。
よって $3^fM=3\varphi(a)-21$、
$3^{f-1}M=\varphi(a)-7$, また $2*3^{f-1}\varphi(M)=a-22$
a は偶数より $a=2^eL$（L は 2 の倍数でない）
$3^{f-1}M=2^{e-1}\varphi(L)-7,3^{f-1}\varphi(M)=2^{e-1}L-11$
よって
$3^{f-1}co\varphi(M)+2^{e-1}co\varphi(L)=4$

$3^{f-1}co\varphi(M)=3$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=1$

$f=2$、$M=Q$、$e=1$、$L=p$ より $a=2p, A=3^2Q$.
これを定義式に代入して $3^2Q=3\varphi(2p)-21$
$3Q=(p-1)-7$ よって $p=3Q+8$（スーパー双子素数）

$3^{f-1}co\varphi(M)=0$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=4$
$M=1$、$e=3$、$L=p$ より $a=2^3p, A=3^f$
これを定義式に代入して $3^f=3\varphi(2^3p)-21=2^2*3(p-1)-21$
$3^{f-1}=4(p-1)-7$ よって $4p=3^{f-1}+11$.

表 2: $h = 3$,$m = -19$

a	素因数分解	A	素因数分解
67	67	180	$2^2 * 3^2 * 5$
139	139	396	$2^2 * 3^2 * 11$
163	163	468	$2^2 * 3^2 * 13$
211	211	612	$2^2 * 3^2 * 17$
283	283	828	$2^2 * 3^2 * 23$
379	379	1116	$2^2 * 3^2 * 31$
499	499	1476	$2^2 * 3^2 * 41$
523	523	1548	$2^2 * 3^2 * 43$
571	571	1692	$2^2 * 3^2 * 47$
643	643	1908	$2^2 * 3^2 * 53$
739	739	2196	$2^2 * 3^2 * 61$
811	811	2412	$2^2 * 3^2 * 67$
859	859	2556	$2^2 * 3^2 * 71$
883	883	2628	$2^2 * 3^2 * 73$
1171	1171	3492	$2^2 * 3^2 * 97$

$m = -19$
$A = 3\varphi(a) - 18$,$\varphi(A) = a - 19$
A は 2,3 の倍数より $A = 2^e * 3^f M$(M は 2,3 の倍数でない)とかける。
$2^e * 3^f M = 3\varphi(a) - 18$ より $2^e * 3^{f-1} M = \varphi(a) - 6$
$2^e * 3^{f-1} \varphi(M) = a - 19$
より $2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) + co\varphi(a) = 13$

$2^e * 3^{f-1} co\varphi(M) = 12$ かつ $co\varphi(a) = 1$
$2^e * 3^{f-1} = 12$,$M = Q$,$a = p$
$e = 2$,$f = 2$ より $a = p$,$A = 2^2 * 3^2 Q$,
定義式に代入して $2^2 * 3^2 Q = 3(p-1) - 18$ より $2^2 * 3Q = p - 7$ つまり $p = 2^2 * 3Q + 7$.(スーパー双子素数)

表 3: $h=3$,$m=-16$

a	素因数分解	A	素因数分解
18	$2*3^2$	3	3
28	2^2*7	21	3*7
52	2^2*13	57	3*19
76	2^2*19	93	3*31
148	2^2*37	201	3*67
172	2^2*43	237	3*79
256	2^8	369	3^2*41
268	2^2*67	381	3*127
292	2^2*73	417	3*139
316	2^2*79	453	3*151
412	2^2*103	597	3*199
436	2^2*109	633	3*211
556	2^2*139	813	3*271
628	2^2*157	921	3*307
772	2^2*193	1137	3*379
892	2^2*223	1317	3*439
1108	2^2*277	1641	3*547
1228	2^2*307	1821	3*607

$m=-16$
$A=3\varphi(a)-15$,$\varphi(A)=a-16$
$A=3^fM$(M は 3 の倍数でない）$a=2^eL$(L は奇数）と書ける。
$3^fM=3*2^{e-1}\varphi(L)-15$、$3^{f-1}M=2^{e-1}\varphi(L)-5$
$2*3^{f-1}\varphi(M)=2^eL-16$、$3^{f-1}\varphi(M)=2^{e-1}L-8$
$3^{f-1}co\varphi(M)+2^{e-1}co\varphi(L)=3$

$3^{f-1}co\varphi(M)=3$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=0$
$f=2$,$M=Q$,$L=1$ より $A=3^2Q$,$a=2^e$
定義式に代入して $3^2Q=3*2^{e-1}-15$、$3Q=2^{e-1}-5$

$3^{f-1}co\varphi(M)=1$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=2$
$f=1$、$M=Q$、$e=2$、$L=p$
$A=3Q$、$a=2^2p$ 定義式に代入して $3Q=3\varphi(2^2p)-15$
$Q=2(p-1)-5$、$Q=2p-7$。

$3^{f-1}co\varphi(M)=0$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=3$
$M=1$,$e=1$,$L=9$
$A=3^f$,$a=2*3^2$ より $3^f=3\varphi(2*3^2)-15$,$3^{f-1}=2*3-5$ より $f=1$
$a=2*3^2$,$A=3$.

表 4: $h=3, m=-10$

a	素因数分解	A	素因数分解
12	2^2*3	3	3
22	2*11	21	3*7
28	2^2*7	27	3^3
34	2*17	39	3*13
46	2*23	57	3*19
82	2*41	111	3*37
94	2*47	129	3*43
142	2*71	201	3*67
166	2*83	237	3*79
172	2^2*43	243	3^5
202	2*101	291	3*97
214	2*107	309	3*103
226	2*113	327	3*109
262	2*131	381	3*127
334	2*167	489	3*163
394	2*197	579	3*193
454	2*227	669	3*223
466	2*233	687	3*229
562	2*281	831	3*277

$m=-10$
$A=3\varphi(a)-9, \varphi(A)=a-10$
$A=3^fM(M$ は 3 の倍数でない)、$a=2^eL(L$ は 2 の倍数でない）とかける。
$3^fM=3\varphi(2^eL)-9, 3^{f-1}M=2^{e-1}\varphi(L)-3$
$\varphi(3^fM)=2^eL-10, 3^{f-1}\varphi(M)=2^{e-1}L-5$
よって $3^{f-1}co\varphi(M)+2^{e-1}co\varphi(L)=2$

$3^{f-1}co\varphi(M)=1$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=1$
$f=1$、$M=Q$、$e=1$、$L=p$
$a=2p$、$A=3Q$
これを定義式に代入して $Q=p-4$

$3^{f-1}co\varphi(M)=0$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=2$
$M=1$、$e=2$、$L=p$ より
$a=2^2p, A=3^f$

これを定義式に代入して $3^{f-1} = 2p - 5$

表 5: $h=3,m=-9$

a	素因数分解	A	素因数分解
21	3*7	28	2^2*7
33	3*11	52	2^2*13
69	3*23	124	2^2*31
93	3*31	172	2^2*43
129	3*43	244	2^2*61
141	3*47	268	2^2*67
201	3*67	388	2^2*97
213	3*71	412	2^2*103
309	3*103	604	2^2*151
321	3*107	628	2^2*157
329	7*47	820	2^2*5*41
393	3*131	772	2^2*193
453	3*151	892	2^2*223
489	3*163	964	2^2*241
573	3*191	1132	2^2*283
633	3*211	1252	2^2*313
669	3*223	1324	2^2*331
681	3*227	1348	2^2*337
753	3*251	1492	2^2*373
849	3*283	1684	2^2*421

$m=-9$
$A=3\varphi(a)-8,\varphi(A)=a-9$
a は 3 の倍数と仮定すると $a=3^eL$(L は 3 の倍数でない）とかける。
$A=2*3^e\varphi(L)-8$、$\varphi(A)=3^eL-9$
A は偶数より $A=2^fM$（M は奇数) とかける。
$2^{f-1}M=3^e\varphi(L)-4$、$2^{f-1}\varphi(M)=3^eL-9$ より
$2^{f-1}co\varphi(M)+3^eco\varphi(L)=5$

$2^{f-1}co\varphi(M)=2$ かつ $3^eco\varphi(L)=3$ の場合
$f=2,m=Q,e=1,L=p$ より $a=3p,A=2^2Q$
これを定義式に代入して $2^2Q=3\varphi(3p)-8,2Q=3(p-1)-4=3p-7$
$a=7*47,A=2^2*5*41$ は定義式を満たすが特殊解である。

表 6: $h = 3,m = -7$

a	素因数分解	A	素因数分解
23	23	60	$2^2 * 3 * 5$
25	5^2	54	$2 * 3^3$
31	31	84	$2^2 * 3 * 7$
47	47	132	$2^2 * 3 * 11$
71	71	204	$2^2 * 3 * 17$
79	79	228	$2^2 * 3 * 19$
127	127	372	$2^2 * 3 * 31$
151	151	444	$2^2 * 3 * 37$
167	167	492	$2^2 * 3 * 41$
191	191	564	$2^2 * 3 * 47$
239	239	708	$2^2 * 3 * 59$
271	271	804	$2^2 * 3 * 67$
359	359	1068	$2^2 * 3 * 89$
431	431	1284	$2^2 * 3 * 107$
439	439	1308	$2^2 * 3 * 109$
599	599	1788	$2^2 * 3 * 149$
607	607	1812	$2^2 * 3 * 151$
631	631	1884	$2^2 * 3 * 157$
719	719	2148	$2^2 * 3 * 179$
727	727	2172	$2^2 * 3 * 181$
911	911	2724	$2^2 * 3 * 227$
919	919	2748	$2^2 * 3 * 229$

$m = -7$
$A = 3\varphi(a) - 6,\varphi(A) = a - 7$
A は 3 の倍数より $A = 3^f M$（m は 3 の倍数でない）と書ける。
$3^f M = 3\varphi(a) - 6,$
$3^{f-1}M = \varphi(a) - 2,2 * 3^{f-1}\varphi(M) = a - 7$
$M = 2^e L$（L は偶数）とかける。
$3^{f-1} * 2^e L = \varphi(a) - 2,3^{f-1} * 2^e\varphi(L) = a - 7$
$3^{f-1} * 2^e co\varphi(L) + co\varphi(a) = 5$

$3^{f-1} * 2^e co\varphi(L) = 4$ かつ $co\varphi(a) = 1$ の場合
$a = p,f = 1,e = 2,L = Q$ より $a = p,2^2 * 3Q$。
定義式に代入して $2^2 * 3Q = 3(p-1) - 6$ より $4Q = (p-1) - 2,p = 4Q + 3$。

$3^{f-1} * 2^e co\varphi(L) = 0$ かつ $co\varphi(a) = 5$ の場合
$L = 1$,$a = 25 = 5^2$,$A = 3\varphi(5^2) - 6$,$A = 3 * 4 * 5 - 6 = 54 = 2 * 3^3$.