

僕の大好きな数学

梶田光

03.28.2019

1 双子素数予想

最初に, x までの素数の個数を求める関数を素数計数関数といい, $\pi(x)$ で表す.
 x が素数であるかどうかを求める関数を考える. この場合, $\pi(x) - \pi(x-1)$ が使用できる. なぜなら,
 x が素数のとき, 素数計数関数の x での増加量は 1 なので, $\pi(x)$ と $\pi(x-1)$ の差が 1,
つまり $\pi(x) - \pi(x-1) = 1$ となるが,
 x が素数でないとき, 素数計数関数の x での増加量は 0 なので, $\pi(x)$ と $\pi(x-1)$ の差が 0,
つまり $\pi(x) - \pi(x-1) = 0$ となる. したがって,

$$\pi(x) - \pi(x-1) = \begin{cases} 1 & (x \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

前式より, $x+2$ が素数かどうかを求める関数は $\pi(x+2) - \pi(x+1)$ である.

$$\pi(x+2) - \pi(x+1) = \begin{cases} 1 & (x+2 \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

次に, x が素数かつ $x+2$ が素数である (つまり x が双子素数の弟) かどうかを求める関数は
 $(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1))$ である. なぜなら,
まず $\pi(x) - \pi(x-1) = a$, $\pi(x+2) - \pi(x+1) = b$, $(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1)) = c$
とおくと, $a \cdot b = c$ である. ここで,
 x が素数かつ $x+2$ が素数のとき, $a = 1$, $b = 1$ なので, $c = 1 \cdot 1 = 1$
 x が素数かつ $x+2$ が素数でないとき, $a = 1$, $b = 0$ なので, $c = 1 \cdot 0 = 0$
 x が素数でない, かつ $x+2$ が素数のとき, $a = 0$, $b = 1$ なので, $c = 0 \cdot 1 = 0$
 x と $x+2$ が両方素数でないとき, $a = 0$, $b = 0$ なので, $c = 0 \cdot 0 = 0$ よって,

$$(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1)) = \begin{cases} 1 & (x \in \text{prime and } x+2 \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

よって, x 以下の双子素数の弟の数は,

$$\sum_{n=2}^x (\pi(n) - \pi(n-1))(\pi(n+2) - \pi(n+1)) \quad (1)$$

ここで, 双子素数予想は, 双子素数の組は無限にある, つまり前式が発散する事と同値である.

2 スーパー双子素数予想

(1) 式をスーパー双子素数にも応用することができる。

ここで、スーパー双子素数とは、T 条件 (高橋条件), つまり $\gcd(a, b) = 1$ かつ $a + b \equiv 1 \pmod{2}$ を満たす a, b について,

$p \in \text{prime}$ かつ $q = ap + b \in \text{prime}$ となるような p, q である。

スーパー双子素数予想とは、このような p, q が無限に存在するという予想である。

まず、 p が素数かどうかは、前述のように、 $\pi(p) - \pi(p - 1)$ で計算できる。

つぎに、 $q = ap + b$ が素数かどうかは、 $\pi(ap + b) - \pi(ap + b - 1)$ で求められる。

よって、 x 以下のスーパー双子素数の弟の数は、

$$\sum_{n=2}^x (\pi(n) - \pi(n - 1)) (\pi(an + b) - \pi(an + b - 1))$$

ここで、スーパー双子素数予想は、スーパー双子素数の組は無限にある、つまり前式が発散する事と同値である。