双子素数予想とスーパー双子素数予想

梶田光

1 双子素数予想

最初に, x までの素数の個数を求める関数を素数計数関数といい, $\pi(x)$ で表す.
x が素数であるかどうかを求める関数を考える. この場合, $\pi(x)-\pi(x-1)$ が使用できる.
なぜなら,
x が素数のとき, 素数計数関数の x での増加量は 1 なので, $\pi(x)$ と $\pi(x-1)$ の差が 1,
つまり $\pi(x)-\pi(x-1)=1$ となるが,
x が素数でないとき, 素数計数関数の x での増加量は 0 なので, $\pi(x)$ と $\pi(x-1)$ の差が 0,
つまり $\pi(x)-\pi(x-1)=0$ となる. したがって,

$$\pi(x)-\pi(x-1)=\begin{cases}1 & (x\in\mathrm{prime})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(x\in\mathbb{N})$$

前式より, $x+2$ が素数かどうかを求める関数は $\pi(x+2)-\pi(x+1)$ である.

$$\pi(x+2)-\pi(x+1)=\begin{cases}1 & (x+2\in\mathrm{prime})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(x\in\mathbb{N})$$

次に, x が素数かつ $x+2$ が素数である (つまり x が双子素数の弟) かどうかを求める関数は
$(\pi(x)-\pi(x-1))(\pi(x+2)-\pi(x+1))$ である. なぜなら,
まず $\pi(x)-\pi(x-1)=a,\ \ \pi(x+2)-\pi(x+1)=b,\ \ (\pi(x)-\pi(x-1))(\pi(x+2)-\pi(x+1))=c$ とおくと, $a\cdot b=c$ である. ここで,
x が素数かつ $x+2$ が素数のとき, $a=1$, $b=1$ なので, $c=1\cdot 1=1$
x が素数かつ $x+2$ が素数でないとき, $a=1$, $b=0$ なので, $c=1\cdot 0=0$
x が素数でない, かつ $x+2$ が素数のとき, $a=0$, $b=1$ なので, $c=0\cdot 1=0$
x と $x+2$ が両方素数でないとき, $a=0$, $b=0$ なので, $c=0\cdot 0=0$ よって,

$$(\pi(x)-\pi(x-1))(\pi(x+2)-\pi(x+1))=\begin{cases}1 & (x\in\mathrm{prime}\ \text{ and }\ x+2\in\mathrm{prime})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(x\in\mathbb{N})$$

よって, x 以下の双子素数の弟の数は,

$$\sum_{n=2}^{x}(\pi(n)-\pi(n-1))(\pi(n+2)-\pi(n+1))\tag{1}$$

ここで, 双子素数予想は, 双子素数の組は無限にある, つまり前式が発散する事と同値である.

2　スーパー双子素数予想

(1) 式をスーパー双子素数にも応用することができる.
ここで, スーパー双子素数とは, T 条件 (高橋条件), つまり $\gcd(a, b) = 1$ かつ $a + b \equiv 1 \pmod 2$ を満たす a, b について,
$p \in \mathrm{prime}$ かつ $q = ap + b \in \mathrm{prime}$ となるような p, q である.
スーパー双子素数予想とは, このような p, q が無限に存在するという予想である.
まず, p が素数かどうかは, 前述のように, $\pi(p) - \pi(p-1)$ で計算できる.
つぎに, $q = ap + b$ が素数かどうかは, $\pi(ap + b) - \pi(ap + b - 1)$ で求められる.
よって, x 以下のスーパー双子素数の弟の数は,

$$\sum_{n=2}^{x} (\pi(n) - \pi(n-1))(\pi(an + b) - \pi(an + b - 1))$$

ここで, スーパー双子素数予想は, スーパー双子素数の組は無限にある, つまり前式が発散する事と同値である.