スーパー完全数とスーパー双子素数

飯高 茂 (学習院大学名誉教授),
高橋洋翔 (池之上小学校 5 年)

2018 年 12 月 15 日

目 次

1　スーパー双子素数

平成 30 年 3 月 8 日 (木) に行われた『完全数の新しい世界』の出版記念会で提出した問題は次の 2 つであった.

与えられた 整数 $(a>0,b)$ に対して, $p=aq+b$ とおくとき p,q がともに素数なら (p,q) を a,b に関しての 超 (スーパー) 双子素数という.

1. 超双子素数が無限にある a,b はどんな条件を満たすか
2. 超双子素数が有限個の a,b は存在するか
3. 与えられた $(a>0,b)$ に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a)$,$\varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

1.1　ウルトラ３つ子素数

与えられた 整数 $(a>0,b)$ に対して, 整数 $(a>0,b,c>0,d)$ に対して $p=aq+b, r=cq+d$ とおくとき p,q,r がともに素数なら (p,q,r) を a,b,c,d に関してのウルトラ 3 つ子素数という.

- ウルトラ 3 つ子素数が無限にある a,b,c,d はどんな条件を満たすか
- ウルトラ 3 つ子素数が有限個の a,b,c,d は存在するか
- 与えられた (a,b,c,d) に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a)$,$\varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

高橋洋翔は数日後次の解答を寄せた.

1) 1.1 (i)$a+b\equiv 1 \mod 2$, (ii)a,b は互いに素

2.1 (i) $a+b\equiv 1 \mod 2$, (ii) a,b は互いに素,(iii)$c+d\equiv 1 \mod 2, (iv)c,d$ は互いに素.

ただし $b\not\equiv 0 \mod 3$: (水谷一による修正)

注意 1 (水谷一, 除外条件の精密化) $ac\equiv -bd\not\equiv 0 \bmod 3$ を満たすときウルトラ三つ子素数は有限個 *(ただ 1 つ)*.

以前から双子素数の問題 (無限にあるという予想) に関心のあった高橋はこれらの条件を満たすときスーパー双子素数 ($p,q\geq 3$ とする) やウルトラ三つ子素数は無限にあるのではないか, という予想を述べた.

2018 年にお台場の TFT ホールで開かれた日本数学教育学会 100 周年記念企画として開かれた研究発表会でポスター発表として一般向けに発表された.

スーパー双子素数やウルトラ三つ子素数は単なる双子素数の問題の一般化ではなくスーパー完全数の m だけ平行移動したとき, これらが自然な形で登場するところに意義深さがありここでは完全数, スーパー完全数, それらの平行移動から説明する.

表 1: スーパー双子素数 $p, q = 3p + 10$ の実際の個数と積分による近似公式の結果

$p \leq x$	積分値	補正後	実際 E	差 D	D/E*10000
1,000	27	96	79	17	2,091
10,000	140	492	472	20	430
100,000	850	2,993	2,941	52	176
500,000	3,203	11,275	11,183	92	81
1,000,000	5,738	20,201	20,210	(9)	(5)
2,000,000	10,343	36,411	36,359	52	14
5,000,000	22,719	79,984	79,869	115	14
10,000,000	41,428	145,850	145,758	92	6

その後, 高橋は Hardy Littlewodd の双子素数の個数の近似公式を参考にしてスーパー双子素数やウルトラ三つ子素数の個数の近似公式を作成した. これは別の論文で発表される.

積分値は高橋のスーパー双子素数の個数評価式による

200 万,500 万,1000 万は飯高による計算

100 万での補正後数値は高橋では 20203

100 万を超えてからの数値は驚異的な精度である.

2 完全数の m だけ平行移動

完全数の定義は周知ではあるが最初から説明する. a の約数の和を $\sigma(a)$ で示す.

$\sigma(a) = 2a$ のとき a を完全数という. $a = 6, 28, 496, 8128,$ はその例

エウクレイデス (ユークリッド) の原論の最後の主張は $q = 2^{e+1} - 1$ が素数なら $a = 2^e q$ が完全数になるということである.

パラメータ m を取り m だけ平行移動した狭義の完全数 α を次のように導入する. $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書けるとき. α を m だけ平行移動した狭義の完全数という.

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと,$N = \sigma(a) = 2a - 1,\ q = N + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2a + m$ を満たす.

$Nq = (2a - 1)q = 2\alpha - q, N - q = -m$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\
&= Nq + N \\
&= 2\alpha - q + N \\
&= 2\alpha - m.
\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす.

この解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

$m = 0$ の場合は α:偶数なら $\alpha = 2^e q, (q = 2^{e+1} - 1$ が素数) と書けることをオイラーが示した.

与えられた m に対し平行移動 m の (広義) 完全数を決定することはどの m についてもできていない.

3　スーパー完全数

$\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ とする.

$\sigma^2(a) = 2a$ を満たす a をスーパー完全数 (Superperfect numbers) と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana により 1969 年に導入された. 偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ となることも 彼により示された. しかも, このとき,$q = 2^{e+1} - 1$ は素数になり, $\alpha = 2^e q$ はユークリッドの完全数である.

これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても奇数スーパー完全数は見つからない.

表 2: $\sigma^2(a) = 2a$ のとき (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

4　スーパー完全数の一般化

Wikipedia の Superperfect numbers の項にはスーパー完全数の一般化が出ている.

$\sigma^2(a)$ を一般にして m 回 $\sigma(\ )$ を合成した関数を考え $\sigma^m(a)$ とおく.

$\sigma^m(a) = 2a$ をスーパー完全数の一般化と考え, $m-$ スーパー完全数と言う. しかし $m \geq 3$ のとき偶数の解は存在しない.

一般に $k \geq 3$ について $\sigma(a) = ka$ を満たす解を k 重完全数と言う.

そこで $\sigma^m(a) = ka$ を満たす解を (m, k) スーパー完全数と言う.

表 3: $\sigma^3(a) = ka - 1$ のとき (スーパー完全数)

a	素因数分解
$k = 4$	完全数の 2 べき部分 *
2	2
4	2^2
16	2^4
64	2^6
4096	2^{12}
$k = 5$	
21	$3 * 7$
$k = 7$	
223	223
$k = 8$	
905	$5 * 181$
$k = 11$	
632	$2^3 * 79$

* 高橋洋翔による (ここは面白そう)

定理 1 (D.Suryanaryana) $\sigma^2(a) = 2a$ の解 a は偶数と仮定すると, a は完全数の 2 べき部分となる.

命題 1 $\sigma^3(a) = 2a$ の解 a は偶数と仮定すると, 矛盾する.

$k \geq 3, \sigma^k(a) = 2a$ から矛盾が出る.

5 別の考え

Suryanaryana により導入された $\sigma^2(a) = 2a$ で定義されたスーパー完全数 は意外にも発展した. しかし $k \geq 3$ のときに $\sigma^k(a) = 2a$ を満たす a を考えるという行き方はどうだろう. 発想が貧困に過ぎるように思う. ここでは別の考えをとろう.

スーパー完全数の定義に戻り $2a$ がなぜ出てくるか考えてみよう. その理由は $a = 2^e$ とすると $\sigma(a) = 2a - 1$ ということにある.

そこで $a = 3^e$ とすると $2\sigma(a) = 3a - 1$ なので, ここに注目し $q = \sigma(a) + m$: 素数と仮定する.

$q = \sigma(a) + m = \dfrac{3a-1}{2} + m,$ によって $q + 1 = \dfrac{3a+1}{2} + m$ となることに着目し $A = \sigma(a) + m$ とおく.

すると $\sigma(A) = q + 1 = \dfrac{3a+1}{2} + m.$
そこで $2(\sigma(A) - m) = 3a + 1$ を書き直して

$$2\sigma(A) = 3a + 2m + 1.$$

これは見かけのよい式である. ついでにこれを次のように一般化しておく.

6 平行移動 m ,素数 P を 底とするスーパー完全数

底を素数 P とし , 平行移動 m の スーパー完全数の定義は次の通り.

指数 e について, $a = P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = \sigma(a) + m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q) = q + 1$ となる.

あらためて, $A = \sigma(a) + m$ とおき, $\sigma(A) = q + 1$ に注目する.

$\overline{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $q - m = \sigma(a) = \dfrac{W}{\overline{P}}$ になり,

$$\sigma(A) = q + 1 = \frac{W}{\overline{P}} + 1 + m = \frac{W + \overline{P}(1+m)}{\overline{P}} = \frac{P^{e+1} + P - 2 + m\overline{P}}{\overline{P}}$$

.

これより

$$\overline{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\overline{P}.$$

定義 1 $A=\sigma(a)+m, \overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$ を m だけ平行移動した素数 P を底とする平行移動 m のスーパー完全数の連立方程式, その解を 平行移動 m, 素数 P を底とするスーパー完全数という.

A は P を底とするスーパー完全数 a のパートナーと呼ばれる.

補題 1 P を底とする平行移動 m のスーパー完全数が $a=P^e$ と書けるときパートナー A は素数になる.

Proof.
$a=P^e$ として $\overline{P}=P-1, W=P^{e+1}-1$ とおくとき,
$A=\sigma(a)+m=\dfrac{W}{\overline{P}}+m.$
定義式 $\overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$ を $\overline{P}$ で割ると

$$\sigma(A)=\frac{W+(m+1)\overline{P}}{\overline{P}}=\frac{W}{\overline{P}}+m+1.$$

$A=\sigma(a)+m=\dfrac{W}{\overline{P}}+m$ により $\dfrac{W}{\overline{P}}+m+1=A+1$ が成り立つので, $\sigma(A)=A+1$. よって A は素数.
End.

7 $P = 3$ のスーパー 完全数の例

$P = 3$ のときは

$$A = \sigma(a) + m, 2\sigma(A) = 3a + 1 + 2m.$$

表 4: $P = 3, m = -2$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
3	3	2	2
9	3^2	11	11
49	7^2	55	5*11
729	3^6	1091	1091
6561	3^8	9839	9839

7^2 以外は 3 べき

表 5: $P = 3, m = 0$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
9	3^2	13	13
729	3^6	1093	1093
531441	3^{12}	797161	797161

8　オイラーの定理の類似

定理 2 解 a が $A=\sigma(a), \overline{P}\sigma(A)=aP+P-2$ を満たすとき (すなわち $m=0$ のとき) 解が P の倍数なら a は P のべき.

Proof.

解 a は P の倍数と仮定したので, $a=P^eL, (P \not| L)$ と書ける $W=P^{e+1}-1$ とおくとき, $A=\sigma(a)=\dfrac{W\sigma(L)}{\overline{P}}$.

$W_0=1+P+P^2+\cdots+P^e$ とおくと, $W_0=\dfrac{W}{\overline{P}}$.

$A=\sigma(a)=W_0\sigma(L)$ によって, $L>1$ を仮定すると,$\sigma(L)\geq 1+L$.

$$\sigma(A)\geq 1+A+\sigma(L)>1+W_0\sigma(L)+L.$$

$\overline{P}$ を乗じると,

$$\overline{P}\sigma(A)>\overline{P}+\overline{P}W_0\sigma(L)+\overline{P}L=\overline{P}+W\sigma(L)+\overline{P}L.$$

一方, $W=P^{e+1}-1$ により,

$$\begin{aligned} aP+P-2&=P^{e+1}L+P-2\\ &=(W+1)L+P-2 \end{aligned}$$

かくして

$$\begin{aligned} aP+P-2&=\overline{P}\sigma(A)\\ &>\overline{P}+\overline{P}W_0\sigma(L)+\overline{P}L\\ &=\overline{P}+W\sigma(L)+\overline{P}L. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(W+1)L+P-2\geq \overline{P}+W\sigma(L)>P+1+WL+W+\overline{P}L.$$

これは矛盾.

End

よって, $L=1$ なので解は $a=P^e$. ここで, $A=\sigma(a)=\frac{W}{\overline{P}}=W_0$ は素数. これを底 P の一般 Mersenne 素数という.

次に計算例を示す.

表 6: $P > 2, m = 0$: スーパー完全数

$P = 3, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
9	3^2	13
729	3^6	1093
531441	3^{12}	797161
$P = 5, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
25	5^2	31
15625	5^6	19531
9765625	5^{10}	12207031
$P = 7, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
2401	7^4	2801
$P = 13, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
28561	13^4	30941
4826809	13^6	5229043
$P = 17, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
289	17^2	307
83521	17^4	88741

9 究極の完全数での メルセンヌ素数

底を P とする究極の完全数の定義は次の通り.

指数 e について, $a = P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = \sigma(a)+m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q) = q + 1$ となる.

$\alpha = aq$ を平行移動 m の究極の完全数という. これの満たす方程式を次のように作る.

$\sigma(\alpha) = \sigma(a)(q + 1)$ を基に次のように式を変形する.

$A = \sigma(a)+m$ とおき, さらに $\overline{P} = P-1, W = P^{e+1}-1$ とおくとき, $q-m = \sigma(a) = \dfrac{W}{\overline{P}}$ になり, $\sigma(A) = q + 1 = \frac{W}{\overline{P}} + 1 + m = \frac{W+\overline{P}(1+m)}{\overline{P}} = \frac{P^{e+1}+P-2+m\overline{P}}{\overline{P}}$.

$\sigma(a) = \dfrac{W}{\overline{P}}, W = \sigma(a)\overline{P}$ に注目して

$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(a)q + \overline{P}\sigma(a) = Wq + W = P^{e+1}q - q + W = P\alpha - q + W$.

$q = \sigma(a) + m = \dfrac{W}{\overline{P}} + m$ によって, $\overline{P}(q - m) = W$.

$P\alpha - q + W = P\alpha - q + \overline{P}(q - m) = P\alpha + q(P - 2) + m\overline{P}$ によって,

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + q(P-2) + m\overline{P}.$$

これが, 平行移動 m の究極の完全数の定義式でこれを満たす, a を平行移動 m の究極の完全数という.

$m=0$ ならこれを究極の完全数という.

ここで, $a=P^{\varepsilon}Q$ と素数 Q で書ける解を A 型の解という.

$P=2$ の完全数が偶数なら A 型の解になることは Euler が 1747 年に証明した.

一般の底が P のとき, 究極の完全数であって A 型の解になるとき, Euler 型の完全数という.

Euler 型の完全数 $\alpha = P^{\varphi}Q$ において $a=P^{\varepsilon}$ はスーパー完全数であり Q は一般の Mersenne 素数になることが容易に確認できる.

実際, $m=0$ として $\alpha = P^{\varepsilon}Q, Q:$ 素数, を定義式 ($\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + q(P-2)$) に代入すると,$Q=q$ として

$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^{\varepsilon})(Q+1)$

$P\alpha + q(P-2) = P^{\varepsilon+1}Q + Q(P-2)$.

$N = P^{\varepsilon+1}-1$ とおくとき $P\alpha + q(P-2) = (N+1)Q + Q(P-2)$.

$$\overline{P}\sigma(P^{\varepsilon})(Q+1) = N(Q+1) = (N+1)Q + Q(P-2)$$

それゆえ $N = Q(P-1) = \overline{P}Q$. $Q = \dfrac{N}{\overline{P}} = 1 + P + \cdots + P^{\varepsilon}$ は一般 Mersenne 素数.

9.1 一般 Mersenne 素数

表 7: $P=2$: Mersenne 素数

e	$q=1+P+\cdots+P^e$	$\alpha = aq$:完全数
1	3	6
2	7	28
4	31	496
6	127	8128
12	8191	33550336
16	131071	
18	524287	
30	2147483647	
60	2305843009213693951	
88	618970019642690137449562111	

表 8: $P = 3$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
2	13
6	1093
12	797161
70	3754733257489862401973357979128773

表 9: $P = 5$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
2	31
6	19531
10	12207031
12	305175781

表 10: $P = 7$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
4	2801
12	16148168401

表 11: $P = 11$: 一般 Mersenne 素数

e	$1 + P + \cdots + P^e$
16	50544702849929377
18	6115909044841454629

10 $P = 3, m = -8$: スーパー 完全数

$P = 3, m = 1, 3, 4,$ などの場合を計算した. 少し先に進み,$m = -8$ で計算したところ素数の解がたくさん出るので驚いた.

さて $P = 3, m = -8$ では $A = \sigma(a) - 8, 2\sigma(A) = 3(a - 5)$ が連立定義方程式である.

表 12: $P = 3, m = -8$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor	B	factor
9	3^2	5	5	5	5
13	13	6	$2*3$	11	11
17	17	10	$2*5$	17	17
29	29	22	$2*11$	35	$5*7$
41	41	34	$2*17$	53	53
53	53	46	$2*23$	71	71
81	3^4	113	113	113	113
89	89	82	$2*41$	125	5^3
101	101	94	$2*47$	143	$11*13$
113	113	106	$2*53$	161	$7*23$
149	149	142	$2*71$	215	$5*43$
173	173	166	$2*83$	251	251
233	233	226	$2*113$	341	$11*31$
269	269	262	$2*131$	395	$5*79$
281	281	274	$2*137$	413	$7*59$
353	353	346	$2*173$	521	521
389	389	382	$2*191$	575	5^2*23

解は $a = 3^e$ または素数である. そこで
$a = p$(素数) とする.
$p - 7$ は偶数なので, $A = \sigma(a) + m = \sigma(p) - 8 = p - 7 = 2^{\varepsilon}Q, (Q$: 奇数), とおく.
$2\sigma(A) = 3a + 1 + 2m = 3a - 16 = 3p - 15$ を思い出す.
$N = 2^{\varepsilon+1} - 1$ により $2\sigma(A) = 2N\sigma(Q)$.
以上によって,

$$2\sigma(A) = 2N\sigma(Q) = 3p - 15 = 3(p - 5).$$

$p = 2^{\varepsilon}Q + 7$ により

$$2N\sigma(Q) = 3(p - 5) = 3(p - 7) + 6 = 3 * 2^{\varepsilon}Q + 6 = 6 * (2^{\varepsilon-1}Q + 1).$$

$N_1 = 2^{\varepsilon-1}$ とおくと,$N = 4N_1 - 1$ となり

$$8N_1 - 2\sigma(Q) = 6 * (N_1Q + 1).$$

これより

$$3 * (N_1Q + 1) = (4N_1 - 1)\sigma(Q).$$

$$
\begin{aligned}
3*(N_1Q+1) &= (4N_1-1)\sigma(Q)\\
&\geq (4N_1-1)(Q+1)\\
&= (4N_1-1)Q+4N_1-1\\
&= 4N_1Q-Q+4N_1-1.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$3*N_1Q+3 \geq 4N_1Q-Q+4N_1-1.$$

ゆえに $4 \geq N_1Q+4N_1-Q$.

まとめて整理し,

$$0 \geq (Q+4)(N_1-1).$$

ゆえに , $N_1=1, \varepsilon=1$.

$3*(N_1Q+1)=(4N_1-1)\sigma(Q)$ にこれらを代入すると,

$3*(Q+1)=(4-1)\sigma(Q)$. よって Q:素数になり,$p=7+2Q$ も素数なので, $(Q, p=2Q+7)$ はスーパー双子素数.

ここでまとめて定理とする.(実は宮本憲一さんとのゼミのおかげである)

定理 3 *$P=3, m=-8$ のときのスーパー完全数が素数 p ならパートナは $A=2Q$ (Q:素数) となり $(Q, p=2Q+7)$ はスーパー双子素数.*

$B=\sigma(A)-1=3\sigma(Q)-1=3Q+2$ とおき高橋のスーパー双子素数生成公式でプログラムを書いてできた結果.

表 13: $Q, p=7+2Q$ はスーパー双子素数

Q	p	B	素因数分解
2	11	8	2^3
3	13	11	11
5	17	17	17
11	29	35	$5*7$
17	41	53	53
23	53	71	71
41	89	125	5^3
53	113	161	$7*23$
71	149	215	$5*43$
83	173	251	251
113	233	341	$11*31$
131	269	395	$5*79$
137	281	413	$7*59$
173	353	521	521
191	389	575	5^2*23
197	401	593	593

B が素数なら $Q, p=2Q+7, B=3Q+2$ がウルトラ三つ子素数になり解 P がウルトラ完全数 II 型, ニュータイプになる. これは後に示す.

$P=3, m=-8$: スーパー 完全数のとき, スーパー双子素数の出る幕があった. 同様のことがいつ起きるか考えてみよう.

スーパー 完全数の定義式 $A=\sigma(a)+m, \overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$ を $\overline{P}$ において，素数解 p があり, そのパートナーが $A=\nu Q, (\nu, Q)$: 互いに素, と書けて, 結果として, (p, Q) がスーパー双子素数になることを期待する.

$A=\sigma(a)+m=p+1+m, p=A-1-m$ に注意して

$$\overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$$

に代入すると,($a=p$ なので)

$$\overline{P}\sigma(A)=(A-1-m)P+P-2+m\overline{P}=AP-m-2.$$

$A=\nu Q$ を代入して

$$\overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q)=P\nu Q-m-2.$$

これより $m+2=P\nu Q-\overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q)$.

Q を素数と仮定すると,$\sigma(Q)=Q+1$.

$$\begin{aligned} m+2 &= P\nu Q-\overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q) \\ &= P\nu Q-\overline{P}\sigma(\nu)(Q+1) \\ &= (P\nu-\sigma(\nu)\overline{P})Q+\sigma(\nu)\overline{P} \end{aligned}$$

ゆえに

$$m+2=(P\nu-\sigma(\nu)\overline{P})Q-\sigma(\nu)\overline{P}.$$

Q はいろいろ変化するので, その係数は 0. すなわち, $P\nu-\sigma(\nu)\overline{P}=0$. そして,

$$m+2=(P\nu-\sigma(\nu)\overline{P})Q-\sigma(\nu)\overline{P}=-\sigma(\nu)\overline{P}.$$

例

$P=3, A=2Q=\nu Q, \nu=2$ とすると $6-\sigma(2)2=0$. $m+2=-\sigma(2)\overline{3}=-6$. よって, $m=-8$.

したがって $P\nu-\sigma(\nu)\overline{P}=0$ の解を求める.

理論を立てるのが難しいのでプログラムを書いてパソコンで解を探した.

$P=2$ なら ν は完全数. $P>2$ なら $P=3, \nu=2$

表 14: P, ν パソコンでの解

P	ν
2	6
2	28
2	496
2	8128
3	2

$P=3, \nu=2$ のとき $m+2=-\sigma(\nu)\overline{P}=-6$ により $m=-8$.

$P=2, \nu$:完全数, のとき $m+2=-\sigma(\nu)\overline{P}=-2\nu$ により $m=-2-2\nu=-14,-58,\cdots$.

水谷一が証明もできることを示した.

補題 2 (水谷一) $P\nu-\sigma(\nu)\overline{P}=0$ の解は $P>2$ が素数なら $P=3, \nu=2$.

Proof.

$\dfrac{\sigma(\nu)}{\nu}=\dfrac{P}{\overline{P}}$ により, 右辺は既約分数なので, 自然数 k があり, $\sigma(\nu)=kP, \nu=k\overline{P}$.

$k>1$ とすると, $\overline{P}=P-1>1$ により, $\overline{P}, k$ は, ν の真の約数なので,

$$kP=\sigma(\nu)\geq 1+\nu=1+kP.$$

これで矛盾. よって $k=1$.

$\sigma(\nu)=kP=P, \nu=k\overline{P}=\overline{P},$. $\sigma(\nu)=1+\nu$ が出るので, $\nu, P=1+\nu$ はともに素数. ゆえに $\nu=2, P=3$.

End

11 平行移動 m ,素数 P を 底とするウルトラ完全数 II 型

底を P とするウルトラ完全数 II 型の定義は次の通り.

指数 e について, $a=P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q=\sigma(a)+m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q)=q+1$ となる.

あらためて, $A=\sigma(a)+m$ とおき, $\sigma(A)=q+1$ に注目する.

$\overline{P}=P-1, W=P^{e+1}-1$ とおくとき, $q-m=\sigma(a)=\dfrac{W}{\overline{P}}$ になり,

$$\sigma(A)=q+1=\frac{W}{\overline{P}}+1+m=\frac{W+\overline{P}(1+m)}{\overline{P}}=\frac{P^{e+1}+P-2+m\overline{P}}{\overline{P}}$$

.

これより

$$\overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}.$$

定義 2 $A=\sigma(a)+m, B=\sigma(A)-1$ とおくと,$\sigma(A)=q+1, B=q$ なので $\sigma(B)=q+1$ により $\overline{P}\sigma(B)=aP+P-2+m\overline{P}$.

かくして 次式が得られた,

$$A=\sigma(a)+m, B=\sigma(A)-1, \overline{P}\sigma(B)=aP+P-2+m\overline{P}.$$

を m だけ平行移動した素数 P を底とするウルトラ完全数 *II* 型の連立方程式, その解を m だけ平行移動した素数 P を底とするウルトラ完全数 *II* 型という.

A は P を底とするウルトラ完全数 II 型 a のパートナー, また B はシャドウ と呼ばれる.

補題 3 P を底とする $a=P^e$ と書けるとき ウルトラ完全数 *II* 型 のパートナー A は素数になる.

Proof.

$a=P^e$ として $\overline{P}=P-1, W=P^{e+1}-1$ とおくとき, $A=\sigma(a)+m=\dfrac{W}{\overline{P}}+m.$

定義式 $\overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$ を $\overline{P}$ で割ると

$$\sigma(A)=\frac{W+(m+1)\overline{P}}{\overline{P}}=\frac{W}{\overline{P}}+m+1.$$

$\dfrac{W}{\overline{P}}+m+1=A+1$ が成り立つので, $\sigma(A)=A+1$. A は素数.

End.

定理 4 解 a がウルトラ完全数 *II* 型 で $m=0$ のとき解が P の倍数なら a は P のべきになる.

Proof.

解 a は P の倍数と仮定したので, $a=P^eL,(P \not| L)$ と書ける $W=P^{e+1}-1$ とおくとき, $A=\sigma(a)=\dfrac{W\sigma(L)}{\overline{P}}$.

$W_0=1+P+P^2+\cdots+P^e$ とおくと, $W_0=\dfrac{W}{\overline{P}}$.

$A=\sigma(a)=W_0\sigma(L)$ によって, $L>1$ を仮定すると,$\sigma(L)\geq 1+L$.

$$\sigma(A)\geq 1+A+\sigma(L)>1+W_0\sigma(L)+L.$$

$\overline{P}$ を乗じると,

$$\overline{P}\sigma(A)>\overline{P}+\overline{P}W_0\sigma(L)+\overline{P}L=\overline{P}+W\sigma(L)+\overline{P}L.$$

一方, $W=P^{e+1}-1$ により,

$$\begin{aligned} aP+P-2 &= P^{e+1}L+P-2 \\ &= (W+1)L+P-2 \end{aligned}$$

かくして

$$\begin{aligned} aP+P-2 &= \overline{P}\sigma(B) \\ &\geq \overline{P}(B+1) \\ &= \overline{P}\sigma(A) \\ &> \overline{P}+\overline{P}W_0\sigma(L)+\overline{P}L \\ &= \overline{P}+W\sigma(L)+\overline{P}L. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(W+1)L+P-2\geq \overline{P}+W\sigma(L)>P+1+WL+W+\overline{P}L.$$

これは矛盾.

End

したがって, このとき $A=\sigma(a)=W_0$ は素数になりこれは一般メルセンヌ素数.

証明はスーパー完全数の場合とほぼ同じであった.

12　合流型のスーパー完全数

スーパー完全数において平行移動をうまく取るとスーパー双子素数が出てくる現象は興味深いものがある. しかし, $P>2$ では $P=3, m=-8$ の場合しか出ない. これは失望させる事態である.

そこで合流型のスーパー完全数を考えてみた. 実は高橋の研究で合流型の完全数を調べた例があった.

ところが合流型のスーパー完全数ではスーパー双子素数が出てくる.

13　平行移動 m ,素数 P を 底とする合流型のスーパー完全数

底を素数 P とし , 平行移動 m の 合流型のスーパー完全数の定義は次の通り.

$a=P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q=P\varphi(a)+m+1$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q)=q+1$ となる.

あらためて, $A=P\varphi(a)+m+1$ とおき, $\sigma(A)=q+1$ に注目する.

$\overline{P}=P-1$ とおくとき, $P\varphi(a)=\overline{P}a$ に注意すれば

$$\sigma(A)=q+1=\overline{P}a+m+2$$

.

そこで , $a=P^e$ はすっかり忘れて

定義 3 $A=P\varphi(a)+m+1,\ \sigma(A)=q+1=\overline{P}a+m+2$ を m だけ平行移動した素数 P を底とする平行移動 m の合流型 スーパー完全数の連立方程式, その解を 平行移動 m, 素数 P を底とする合流型スーパー完全数という.

A は P を底とするスーパー完全数 a のパートナーと呼ばれる.

注意 2 P を底とする平行移動 m のスーパー完全数が $a=P^e$ と書けるときパートナー A は素数になるか?.

実例でみると正しいらしいが?

14　例

$P=3, m=2$ の合流型完全数でもよいが結果が簡単になりすぎる. そこで $P=3, m=14$ 合流型完全数を取り上げる.

この表を参考にして, $a=4p($ $p>2$:素数$)$ とする.

方程式は $A=P\varphi(a)+m+1=3\varphi(4p)+15=6p+9,\ \sigma(A)=\overline{P}a+m+2=8p+16$.

$A=6p+9=3Q, Q=2p+3$ とおき, 取りあえず, Q は奇数なのでこれを素数としてみる. $(p, Q=2p+3)$ はスーパー双子素数.

$A=3Q$ なので, $\sigma(A)=4(Q+1), \overline{P}a+m+2=8p+16=4(Q-3)+16=4Q+4$.

ゆえに $\sigma(A)=\overline{P}a+m+2$ が成り立ち,

表 15: $P=3, m=14$ 合流型スーパー完全数 I　$\varphi(a), \sigma(a)$

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
12	2^2*3	27	3^3	41	41
20	2^2*5	39	$3*13$	57	$3*19$
28	2^2*7	51	$3*17$	73	73
52	2^2*13	87	$3*29$	121	11^2
68	2^2*17	111	$3*37$	153	3^2*17
76	2^2*19	123	$3*41$	169	13^2
116	2^2*29	183	$3*61$	249	$3*83$
172	2^2*43	267	$3*89$	361	19^2
188	2^2*47	291	$3*97$	393	$3*131$
212	2^2*53	327	$3*109$	441	3^2*7^2
268	2^2*67	411	$3*137$	553	$7*79$
292	2^2*73	447	$3*149$	601	601
356	2^2*89	543	$3*181$	729	3^6
388	2^2*97	591	$3*197$	793	$13*61$

$(p, Q=2p+3)$ がスーパー双子素数なら $a=4p$ は $P=3, m=14$ の合流型スーパー完全数になる.

この逆が次の形で成り立つ.

定理 5 $a=4p$ は $P=3, m=14$ の合流型スーパー完全数とすると, $A=3Q$, ここで $(p, Q=2p+3)$ はスーパー双子素数になる.

$A=6p+9=3Q, Q=2p+3$ とおくことはできる. 最初に $3, Q$ は互いに素とする.

$\sigma(A)=4\sigma(Q), \sigma(A)=8p+16=4*2p+16=4(Q-3)+16=4Q+4$ により $\sigma(Q)=Q+1$. よって, Q: 素数.

さて次に $3, Q$ は互いに素を仮定しないで議論を進める.

$Q=3^{\epsilon}q$. ここで $3, q$ は互いに素とする.

$A=6p+9=3Q=3^{\epsilon+1}q$ により,

$2\sigma(A)=(3^{\epsilon+2}-1)\sigma(q)$ となる.$N=3^{\epsilon+2}-1=9N_0-1, N_0=3^{\epsilon}$. よって, $2\sigma(A)=(9N_0-1)\sigma(q)$.

$2p=3^{\epsilon}q-3$ により

$$2\sigma(A)=16p+32=8(3^{\epsilon}q-3)+32=8(3^{\epsilon}q+1)=8(N_0q+1).$$

$(9N_0-1)\sigma(q)=8(N_0q+1)$ が出て, N_0 で整理すると,

$$(9N_0-1)\sigma(q)=8(N_0q+1)=8N_0q+8.$$

$$8N_0q+8=(9N_0-1)\sigma(q)\geq(9N_0-1)(q+1)=9qN_0-q+9N_0-1.$$

$$0 \geq 9qN_0 - q + 9N_0 - 1 - 8N_0q - 8 = N_0q - 9 - q = q(N_0 - 1) - 9.$$

$\epsilon > 0$ なら $N_0 \geq 3$. よって, $N_0 = 3, q = 3, p = 3$. 故に, $a = 4p = 12, A = 3^3$. これ以外なら, $N_0 = 1, Q = q > 3$: 素数.

End

完全数と双子素数は, 一般の数学愛好家にもよく知られた概念だが完全数の一般化と双子素数の一般化がこのように結びついたのである. 驚異というべきか.

参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] 飯高　茂　『数学の研究をはじめよう　(I),(II),(III),(IV),(V)』,　現代数学社 ,2016,2017,2018.

[3] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[4] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[5] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1