

スーパー完全数とスーパー双子素数

飯高 茂 (学習院大学名誉教授),
高橋洋翔 (池之上小学校 5 年)

2018 年 12 月 15 日

目 次

1	スーパー双子素数	2
1.1	ウルトラ 3 つ子素数	2
2	完全数の m だけ平行移動	3
3	スーパー完全数	4
4	スーパー完全数の一般化	5
5	別の考え	6
6	平行移動 m , 素数 P を 底とするスーパー完全数	6
7	$P = 3$ のスーパー 完全数の例	8
8	オイラーの定理の類似	9
9	究極の完全数でのメルセンヌ素数	10
9.1	一般 Mersenne 素数	11
10	$P = 3, m = -8$: スーパー 完全数	12
11	平行移動 m , 素数 P を 底とするウルトラ完全数 II 型	18
12	合流型のスーパー完全数	20
13	平行移動 m , 素数 P を 底とする合流型のスーパー完全数	20
14	例	21

1 スーパー双子素数

平成 30 年 3 月 8 日 (木) に行われた『完全数の新しい世界』の出版記念会で提出した問題は次の 2 つであった.

与えられた 整数 $(a > 0, b)$ に対して, $p = aq + b$ とおくと p, q がともに素数なら (p, q) を a, b に関しての 超 (スーパー) 双子素数という.

1. 超双子素数が無限にある a, b はどんな条件を満たすか
2. 超双子素数が有限個の a, b は存在するか
3. 与えられた $(a > 0, b)$ に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a), \varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

1.1 ウルトラ 3 つ子素数

与えられた, 整数 $(a > 0, c > 0, b, d)$ に対して $p = aq + b, r = cq + d$ とおくと p, q, r がすべて素数なら (p, q, r) を a, b, c, d に関してのウルトラ 3 つ子素数という.

- ウルトラ 3 つ子素数が無限にある a, b, c, d はどんな条件を満たすか
- ウルトラ 3 つ子素数が有限個の a, b, c, d は存在するか
- 与えられた (a, b, c, d) に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a), \varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

高橋洋翔は数日後次の解答を寄せた.

1.1 (i) $a + b \equiv 1 \pmod{2}$, (ii) a, b は互いに素

2.1 (i) $a + b \equiv 1 \pmod{2}$, (ii) a, b は互いに素, (iii) $c + d \equiv 1 \pmod{2}$, (iv) c, d は互いに素.

ただし $b \not\equiv 0 \pmod{3}$: (水谷一による修正)

注意 1 (水谷一, 除外条件の精密化) $ac \equiv -bd \not\equiv 0 \pmod{3}$ を満たすときウルトラ三つ子素数は有限個 (ただ 1 つ).

以前から双子素数は無限にあるという予想に関心のあった高橋はこれらの条件を満たすときスーパー双子素数 ($p, q \geq 3$ とする) やウルトラ三つ子素数は無限にあるのではないかと、という予想を述べた.

2018 年にお台場の TFT ホールで開かれた日本数学教育学会 100 周年記念企画として開かれた研究発表会でポスター発表として一般向けに発表された.

その後, 高橋は Hardy Littlewood による双子素数の個数の近似公式を参考にしてスーパー双子素数やウルトラ三つ子素数の個数の定積分による近似公式を作成した. これは別の論文 (高橋洋翔: スーパー双子素数とウルトラ三つ子素数の分布予想) で発表される.

スーパー双子素数やウルトラ三つ子素数は無限にあるという予想は、双子素数の問題の単なる一般化であるだけではなくスーパー完全数を m だけ平行移動したとき、スーパー双子素数やウルトラ三つ子素数が自然な形で登場するところに意義深さがある。

そこでここでは完全数、スーパー完全数、それらの平行移動から説明する。

表 1: スーパー双子素数 $p, q = 3p + 10$ の実際の個数と積分による近似公式の結果

$p \leq x$	個数の近似公式	実際の個数 E	差 D	D/E*10000
1,000	96	79	17	2,091
10,000	492	472	20	430
100,000	2,993	2,941	52	176
500,000	11,275	11,183	92	81
1,000,000	20,201	20,210	(9)	(5)
2,000,000	36,411	36,359	52	14
5,000,000	79,984	79,869	115	14
10,000,000	145,850	145,758	92	6

200 万,500 万,1000 万は飯高による計算

100 万での補正後数値は高橋では 20203

100 万を超えてからの数値は驚異的な精度になる点に注意したい。

2 完全数の m だけ平行移動

完全数の定義は周知ではあるが最初から説明する。 a の約数の和を $\sigma(a)$ で示す。

$\sigma(a) = 2a$ のとき a を完全数という。 $a = 6, 28, 496, 8128,$ はその例

エウクレイデス(ユークリッド)の原論の最後の主張は $q = 2^{e+1} - 1$ が素数なら $a = 2^e q$ が完全数になるということである。

パラメータ m を取り m だけ平行移動した狭義の完全数 α を次のように導入する。
 $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書けるとき、 α を m だけ平行移動した狭義の完全数という。

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと、 $N = \sigma(a) = 2a - 1, q = N + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2a + m$ を満たす。

$Nq = (2a - 1)q = 2\alpha - q, N - q = -m$ に注意して

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\ &= Nq + N \\ &= 2\alpha - q + N \\ &= 2\alpha - m.\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす.

この自然数解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

$m = 0$ の場合は α が偶数なら $\alpha = 2^e q (q = 2^{e+1} - 1$ が素数) と書けることをオイラーが 1747 年に示した.

与えられた m に対し平行移動 m の (広義) 完全数を決定することはどの m についてもできていない.

3 スーパー完全数

$\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ とする.

$\sigma^2(a) = 2a$ を満たす a をスーパー完全数 (Superperfect numbers) と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana により 1969 年に導入された概念である.

偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ となることも彼により示された. しかも, このとき $q = 2^{e+1} - 1$ は素数になり, $\alpha = 2^e q$ はユークリッドの完全数である.

これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても, 次に見ると分かる通り奇数スーパー完全数は見つからない.

表 2: $\sigma^2(a) = 2a, (a < 10,000,000)$ のとき (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

4 スーパー完全数の一般化

Wikipedia の Superperfect numbers の項にはスーパー完全数の一般化が出ている.

$\sigma^2(a)$ を一般にして m 回 $\sigma(a)$ を合成した関数を考え $\sigma^m(a)$ とおく.

$\sigma^m(a) = 2a$ をスーパー完全数の一般化と考え, m -スーパー完全数と言う. しかし $m \geq 3$ のとき偶数の解は存在しない.

一般に $k \geq 3$ について $\sigma(a) = ka$ を満たす解を k 重完全数と言う.

そこで $\sigma^m(a) = ka$ を満たす解を (m, k) スーパー完全数と言う.

表 3: $\sigma^3(a) = ka - 1$ のとき (スーパー完全数)

a	素因数分解
$k = 4$	完全数の 2 べき部分 *
2	2
4	2^2
16	2^4
64	2^6
4096	2^{12}
$k = 5$	
21	$3 * 7$
$k = 7$	
223	223
$k = 8$	
905	$5 * 181$
$k = 11$	
632	$2^3 * 79$

* 高橋洋翔による (ここは面白そう)

$k = 4$ なら定義式は $\sigma^3(a) = 4a - 1$ となる. この解をウルトラ完全数という.

定理 1 (D.Suryanaryana) $\sigma^2(a) = 2a$ の解 a は偶数と仮定すると, a は完全数の 2 べき部分となる.

命題 1 $\sigma^3(a) = 2a$ の解 a は偶数と仮定すると, 矛盾する.

解 a は偶数と仮定すると $k \geq 3, \sigma^k(a) = 2a$ から矛盾が出ることは容易にわかる.

5 別の考え

Suryanaryana により導入されたスーパー完全数は意外にも発展した. しかし $k \geq 3$ のときに $\sigma^k(a) = 2a$ を満たす a を考えるという行き方はどうだろう. 発想が貧困に過ぎるように思う. ここでは別の考えをとろう.

スーパー完全数の定義に戻り $2a$ がなぜ出てくるか考えてみよう. その理由は $a = 2^e$ とすると $\sigma(a) = 2a - 1$ ということにある.

そこで $a = 3^e$ とすると $2\sigma(a) = 3a - 1$ なので, ここに注目し $q = \sigma(a) + m$: 素数と仮定する.

$q = \sigma(a) + m = \frac{3a-1}{2} + m$, によって $q+1 = \frac{3a+1}{2} + m$ となることに着目し $A = \sigma(a) + m$ とおく.

すると $\sigma(A) = q+1 = \frac{3a+1}{2} + m$.

そこで $2(\sigma(A) - m) = 3a+1$ を書き直して

$$2\sigma(A) = 3a + 2m + 1.$$

これは見かけのよい式である. ついでにこれを次のように一般化しておく.

6 平行移動 m , 素数 P を底とするスーパー完全数

底を素数 P とし, 平行移動 m のスーパー完全数の定義は次の通り.

指数 e について, $a = P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = \sigma(a) + m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q) = q+1$ となる.

あらためて, $A = \sigma(a) + m$ とおき, $\sigma(A) = q+1$ に注目する.

$\bar{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $q - m = \sigma(a) = \frac{W}{\bar{P}}$ になり,

$$\sigma(A) = q+1 = \frac{W}{\bar{P}} + 1 + m = \frac{W + \bar{P}(1+m)}{\bar{P}} = \frac{P^{e+1} + P - 2 + m\bar{P}}{\bar{P}}$$

これより

$$\bar{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\bar{P}.$$

定義 1 $A = \sigma(a) + m, \bar{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\bar{P}$ を m だけ平行移動した素数 P を底とする平行移動 m のスーパー完全数の連立方程式, その解を 平行移動 m , 素数 P を底とするスーパー完全数という.

A はスーパー完全数 a のパートナーと呼ばれる.

補題 1 P を底とする平行移動 m のスーパー完全数が $a = P^e$ と書けるときパートナー A は素数になる.

Proof.

$a = P^e$ として $\bar{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき,

$$A = \sigma(a) + m = \frac{W}{\bar{P}} + m.$$

定義式 $\bar{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\bar{P}$ を \bar{P} で割ると

$$\sigma(A) = \frac{W + (m+1)\bar{P}}{\bar{P}} = \frac{W}{\bar{P}} + m + 1.$$

$A = \sigma(a) + m = \frac{W}{\bar{P}} + m$ により $\frac{W}{\bar{P}} + m + 1 = A + 1$ が成り立つので, $\sigma(A) = A + 1$.
よって A は素数.

End.

7 $P = 3$ のスーパー 完全数の例

$P = 3$ のときは

$$A = \sigma(a) + m, 2\sigma(A) = 3a + 1 + 2m.$$

表 4: $P = 3, m = -2$: スーパー 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
3	3	2	2
9	3^2	11	11
49	7^2	55	$5 \cdot 11$
729	3^6	1091	1091
6561	3^8	9839	9839

解は 7^2 を除くと 3 べきかもしれない.

表 5: $P = 3, m = 0$: スーパー 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
9	3^2	13	13
729	3^6	1093	1093
531441	3^{12}	797161	797161

解は 3 べきだけかもしれない.

8 オイラーの定理の類似

定理 2 解 a が $A = \sigma(a)$, $\overline{P}\sigma(A) = aP + P - 2$ を満たすとき (すなわち $m = 0$ のとき) P の倍数なら a は P のべき.

Proof.

解 a は P の倍数と仮定したので, $a = P^e L$, ($P \nmid L$) と書ける $W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $A = \sigma(a) = \frac{W\sigma(L)}{\overline{P}}$.

$W_0 = 1 + P + P^2 + \dots + P^e$ とおくと, $W_0 = \frac{W}{\overline{P}}$.

$A = \sigma(a) = W_0\sigma(L)$ によって, $L > 1$ を仮定すると, $\sigma(L) \geq 1 + L$.

$$\sigma(A) \geq 1 + A + \sigma(L) > 1 + W_0\sigma(L) + L.$$

この式に \overline{P} を乗じると,

$$\overline{P}\sigma(A) > \overline{P} + \overline{P}W_0\sigma(L) + \overline{P}L = \overline{P} + W\sigma(L) + \overline{P}L.$$

一方, $W = P^{e+1} - 1$ により,

$$\begin{aligned} aP + P - 2 &= P^{e+1}L + P - 2 \\ &= (W + 1)L + P - 2 \end{aligned}$$

かくして

$$\begin{aligned} aP + P - 2 &= \overline{P}\sigma(A) \\ &> \overline{P} + W\sigma(L) + \overline{P}L. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(W + 1)L + P - 2 = aP + P - 2 + \overline{P}L \geq \overline{P} + W\sigma(L) > P + 1 + WL + W + \overline{P}L.$$

これは矛盾.

よって, $L = 1$ なので解は $a = P^e$.

End

ここで, $A = \sigma(a) = \frac{W}{\overline{P}} = W_0$ は素数. これを底が P のときの一般 Mersenne 素数という.

次に計算例を示す.

表 6: $P > 2, m = 0$: スーパー完全数

$P = 3, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
9	3^2	13
729	3^6	1093
531441	3^{12}	797161
$P = 5, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
25	5^2	31
15625	5^6	19531
9765625	5^{10}	12207031
$P = 7, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
2401	7^4	2801
$P = 13, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
28561	13^4	30941
4826809	13^6	5229043
$P = 17, m = 0$		
a	素因数分解	A 素数
289	17^2	307
83521	17^4	88741

9 究極の完全数でのメルセンヌ素数

底を P とする究極の完全数の定義は次の通り.

指数 e について, $a = P^e$ とおいて, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = \sigma(a) + m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q) = q + 1$ となる.

$\alpha = aq$ を平行移動 m の究極の完全数という. この満たす方程式を次のように作る. $\sigma(\alpha) = \sigma(a)(q + 1)$ を基に次のように式を変形する.

$A = \sigma(a) + m$ とおき, さらに $\bar{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくと, $q - m = \sigma(a) = \frac{W}{\bar{P}}$ になり, $\sigma(A) = q + 1 = \frac{W}{\bar{P}} + 1 + m = \frac{W + \bar{P}(1+m)}{\bar{P}} = \frac{P^{e+1} + P - 2 + m\bar{P}}{\bar{P}}$.

$\sigma(a) = \frac{W}{\bar{P}}, W = \sigma(a)\bar{P}$ に注目して

$\bar{P}\sigma(\alpha) = \bar{P}\sigma(a)q + \bar{P}\sigma(a) = Wq + W = P^{e+1}q - q + W = P\alpha - q + W.$

$q = \sigma(a) + m = \frac{W}{\bar{P}} + m$ によって, $\bar{P}(q - m) = W.$

$P\alpha - q + W = P\alpha - q + \bar{P}(q - m) = P\alpha + q(P - 2) + m\bar{P}$ によって,

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + q(P - 2) + m\overline{P}.$$

これが, 平行移動 m の究極の完全数の定義式でありこれを満たす a を平行移動 m の究極の完全数という.

$m = 0$ なら単に究極の完全数という.

ここで, $a = P^\varepsilon Q$ と素数 Q で書ける解を A 型の解という.

$P = 2$ の完全数が偶数なら A 型の解になることは Euler が 1747 年に証明した.

一般の底が P のとき, 究極の完全数であって A 型の解になるとき, Euler 型の完全数という.

Euler 型の完全数 $\alpha = P^\varepsilon Q$ において $a = P^\varepsilon$ はスーパー完全数であり Q は一般の Mersenne 素数になることが容易に確認できる.

実際, $m = 0$ として $\alpha = P^\varepsilon Q, Q: \text{素数}$, を定義式 ($\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + q(P - 2)$) に代入すると, $Q = q$ として

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^\varepsilon)(Q + 1)$$

$$P\alpha + q(P - 2) = P^{\varepsilon+1}Q + Q(P - 2).$$

$$N = P^{\varepsilon+1} - 1 \text{ とおくと } P\alpha + q(P - 2) = (N + 1)Q + Q(P - 2).$$

$$\overline{P}\sigma(P^\varepsilon)(Q + 1) = N(Q + 1) = (N + 1)Q + Q(P - 2)$$

それゆえ $N = Q(P - 1) = \overline{P}Q$. $Q = \frac{N}{\overline{P}} = 1 + P + \dots + P^\varepsilon$ は一般 Mersenne 素数.

9.1 一般 Mersenne 素数

次に計算例をあげる.

表 7: $P = 2$: Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \dots + P^e$	$\alpha = aq$:完全数
1	3	6
2	7	28
4	31	496
6	127	8128
12	8191	33550336
16	131071	以下略
18	524287	
30	2147483647	
60	2305843009213693951	
88	618970019642690137449562111	

表 8: $P = 3$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
2	13
6	1093
12	797161
70	3754733257489862401973357979128773

表 9: $P = 5$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
2	31
6	19531
10	12207031
12	305175781

表 10: $P = 7$: 一般 Mersenne 素数

e	$q = 1 + P + \cdots + P^e$
4	2801
12	16148168401

表 11: $P = 11$: 一般 Mersenne 素数

e	$1 + P + \cdots + P^e$
16	50544702849929377
18	6115909044841454629

こうしていろいろな Mersenne 素数 を見ることは目の保養になる.

10 $P = 3, m = -8$: スーパー 完全数

$P = 3, m = 1, 3, 4$, などの場合を計算した. 少し先に進み, $m = -8$ で計算したところ素数の解がたくさん出るので驚いた.

さて $P = 3, m = -8$ では $A = \sigma(a) - 8, 2\sigma(A) = 3(a - 5)$ が連立定義方程式である.

表 12: $P = 3, m = -8$: スーパー 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
9	3^2	5	5	5	5
81	3^4	113	113	113	113
13	13	6	$2 * 3$	11	11
17	17	10	$2 * 5$	17	17
29	29	22	$2 * 11$	35	$5 * 7$
41	41	34	$2 * 17$	53	53
53	53	46	$2 * 23$	71	71
89	89	82	$2 * 41$	125	5^3
101	101	94	$2 * 47$	143	$11 * 13$
113	113	106	$2 * 53$	161	$7 * 23$
149	149	142	$2 * 71$	215	$5 * 43$
173	173	166	$2 * 83$	251	251
233	233	226	$2 * 113$	341	$11 * 31$
269	269	262	$2 * 131$	395	$5 * 79$
281	281	274	$2 * 137$	413	$7 * 59$
353	353	346	$2 * 173$	521	521
389	389	382	$2 * 191$	575	$5^2 * 23$

解は $a = 3^e$ または素数である. そこで

$a = p$ (素数) とする.

$p - 7$ は偶数なので, $A = \sigma(a) + m = \sigma(p) - 8 = p - 7 = 2^\varepsilon Q$, (Q : 奇数), とおく.

$2\sigma(A) = 3a + 1 + 2m = 3a - 16 = 3p - 15$ を思い出す.

$N = 2^{\varepsilon+1} - 1$ により $2\sigma(A) = 2N\sigma(Q)$.

以上によって,

$$2\sigma(A) = 2N\sigma(Q) = 3p - 15 = 3(p - 5).$$

$p = 2^\varepsilon Q + 7$ により

$$2N\sigma(Q) = 3(p - 5) = 3(p - 7) + 6 = 3 * 2^\varepsilon Q + 6 = 6 * (2^{\varepsilon-1} Q + 1).$$

$N_1 = 2^{\varepsilon-1}$ とおくと, $N = 4N_1 - 1$ となり

$$8N_1 - 2\sigma(Q) = 6 * (N_1 Q + 1).$$

これより

$$3 * (N_1 Q + 1) = (4N_1 - 1)\sigma(Q).$$

$$\begin{aligned}
3 * (N_1 Q + 1) &= (4N_1 - 1)\sigma(Q) \\
&\geq (4N_1 - 1)(Q + 1) \\
&= (4N_1 - 1)Q + 4N_1 - 1 \\
&= 4N_1 Q - Q + 4N_1 - 1.
\end{aligned}$$

したがって,

$$3 * N_1 Q + 3 \geq 4N_1 Q - Q + 4N_1 - 1.$$

ゆえに $4 \geq N_1 Q + 4N_1 - Q$.

まとめて整理し,

$$0 \geq (Q + 4)(N_1 - 1).$$

ゆえに, $N_1 = 1, \varepsilon = 1$.

$3 * (N_1 Q + 1) = (4N_1 - 1)\sigma(Q)$ にこれらを代入すると,

$3 * (Q + 1) = (4 - 1)\sigma(Q)$. よって Q :素数になり, $p = 7 + 2Q$ も素数なので, $(Q, p = 2Q + 7)$ はスーパー双子素数.

ここでまとめて定理とする.(実は宮本憲一さんとのゼミのおかげである)

定理 3 $P = 3, m = -8$ のときのスーパー完全数が素数 p ならパートナーは $A = 2Q$ (Q :素数)となり $(Q, p = 2Q + 7)$ はスーパー双子素数.

$P = 3, m = -8$ のときのスーパー完全数は 3 べきでないなら, 素数 p になりしかも $(Q, p = 2Q + 7)$ はスーパー双子素数.

これ以外の $P = 3, m = -8$ のスーパー完全数はあるか, という問題をたてることは容易である. しかしこれは奇数完全数の問題と類似した性格の問題で今までの数学では解決できないのではないだろうか. ここで若い世代にこのような難問を捧げたいと思う.

$B = \sigma(A) - 1 = 3\sigma(Q) - 1 = 3Q + 2$ とおき高橋のスーパー双子素数生成公式でプログラムを書いてできた結果.

表 13: $Q, p = 7 + 2Q$ はスーパー双子素数

Q	p	B	素因数分解
2	11	8	2^3
3	13	11	11
5	17	17	17
11	29	35	$5 * 7$
17	41	53	53
23	53	71	71
41	89	125	5^3
53	113	161	$7 * 23$
71	149	215	$5 * 43$
83	173	251	251
113	233	341	$11 * 31$
131	269	395	$5 * 79$
137	281	413	$7 * 59$
173	353	521	521
191	389	575	$5^2 * 23$
197	401	593	593

B が素数なら $Q, p = 2Q + 7, B = 3Q + 2$ がウルトラ三つ子素数になり解 P がウルトラ完全数 II 型, ニュータイプになる. これは後に示す.

$P = 3, m = -8$: スーパー完全数のとき, スーパー双子素数が出てきた. 同様のことがいつ起きるか考えてみよう.

スーパー完全数の定義式 $A = \sigma(a) + m, \overline{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\overline{P}$ を \overline{P} において, 素数解 p があり, そのパートナーが $A = \nu Q, (\nu, Q : \text{互いに素}),$ と書ける. 結果として, (p, Q) がスーパー双子素数になることを期待しよう.

$A = \sigma(a) + m = p + 1 + m, p = A - 1 - m$ に注意して

$$\overline{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\overline{P}$$

に代入すると, ($a = p$ なので)

$$\overline{P}\sigma(A) = (A - 1 - m)P + P - 2 + m\overline{P} = AP - m - 2.$$

$A = \nu Q$ を代入して

$$\overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q) = P\nu Q - m - 2.$$

これより $m + 2 = P\nu Q - \overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q).$

Q を素数と仮定すると, $\sigma(Q) = Q + 1.$

$$\begin{aligned} m + 2 &= P\nu Q - \overline{P}\sigma(\nu)\sigma(Q) \\ &= P\nu Q - \overline{P}\sigma(\nu)(Q + 1) \\ &= (P\nu - \sigma(\nu)\overline{P})Q + \sigma(\nu)\overline{P} \end{aligned}$$

ゆえに

$$m + 2 = (P\nu - \sigma(\nu)\overline{P})Q - \sigma(\nu)\overline{P}.$$

Q はいろいろ変化するので, その係数は 0. すなわち, $P\nu - \sigma(\nu)\overline{P} = 0.$ そして, $m + 2 = -\sigma(\nu)\overline{P}.$

例

$P = 3, A = 2Q = \nu Q, \nu = 2$ とすると $6 - \sigma(2)2 = 0$. $m + 2 = -\sigma(2)\bar{3} = -6$. よって, $m = -8$.

したがって $P\nu - \sigma(\nu)\bar{P} = 0$ の解を求める.

理論を立てるのが難しいのでプログラムを書いてパソコンで解を探した.

$P = 2$ なら ν は完全数. $P > 2$ なら $P = 3, \nu = 2$

表 14: P, ν パソコンでの解

P	ν	m
2	6	-14
2	28	-58
2	496	-994
2	8128	-16258
3	2	-8

$P = 3, \nu = 2$ のとき $m + 2 = -\sigma(\nu)\bar{P} = -6$ により $m = -8$.

$P = 2, \nu$: 完全数, のとき $m + 2 = -\sigma(\nu)\bar{P} = -2\nu$ により $m = -2 - 2\nu = -14, -58, \dots$.

水谷一が証明した.

補題 2 (水谷一) $P\nu - \sigma(\nu)\bar{P} = 0$ の解は $P > 2$ が素数なら $P = 3, \nu = 2$.

Proof.

$\frac{\sigma(\nu)}{\nu} = \frac{P}{\bar{P}}$ により, 右辺は既約分数なので, 自然数 k があり, $\sigma(\nu) = kP, \nu = k\bar{P}$.
 $k > 1$ とすると, $\bar{P} = P - 1 > 1$ により, \bar{P}, k は, ν の真の約数なので,

$$kP = \sigma(\nu) \geq 1 + \nu = 1 + kP.$$

これで矛盾. よって $k = 1$.

$\sigma(\nu) = kP = P, \nu = k\bar{P} = \bar{P}$, $\sigma(\nu) = 1 + \nu$ が出るので, $\nu, P = 1 + \nu$ はともに素数.
ゆえに $\nu = 2, P = 3$.

End

11 平行移動 m , 素数 P を底とするウルトラ完全数 II 型

底を P とするウルトラ完全数 II 型の定義は次の通り.

指数 e について, $a = P^e$ とおき, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = \sigma(a) + m$ を素数と仮定する. したがって $\sigma(q) = q + 1$ となる.

あらためて, $A = \sigma(a) + m$ とおき, $\sigma(A) = q + 1$ に注目する.

$\bar{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $q - m = \sigma(a) = \frac{W}{\bar{P}}$ になり,

$$\sigma(A) = q + 1 = \frac{W}{\bar{P}} + 1 + m = \frac{W + \bar{P}(1 + m)}{\bar{P}} = \frac{P^{e+1} + P - 2 + m\bar{P}}{\bar{P}}$$

これより

$$\bar{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\bar{P}.$$

定義 2 $A = \sigma(a) + m, B = \sigma(A) - 1$ とおくと, $\sigma(A) = q + 1, B = q$ なので $\sigma(B) = q + 1$ により $\bar{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\bar{P}$.

かくして 次式が得られた,

$$A = \sigma(a) + m, B = \sigma(A) - 1, \bar{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\bar{P}.$$

を m だけ平行移動した素数 P を底とするウルトラ完全数 II 型の連立方程式, その解を m だけ平行移動した素数 P を底とするウルトラ完全数 II 型という.

A は P を底とするウルトラ完全数 II 型 a のパートナー, また B はシャドウと呼ばれる.

補題 3 P を底とする $a = P^e$ と書けるとき ウルトラ完全数 II 型のパートナー A は素数になる.

Proof.

$a = P^e$ として $\bar{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $A = \sigma(a) + m = \frac{W}{\bar{P}} + m$.

定義式 $\bar{P}\sigma(A) = aP + P - 2 + m\bar{P}$ を \bar{P} で割ると

$$\sigma(A) = \frac{W + (m + 1)\bar{P}}{\bar{P}} = \frac{W}{\bar{P}} + m + 1.$$

$\frac{W}{\bar{P}} + m + 1 = A + 1$ が成り立つので, $\sigma(A) = A + 1$. A は素数.
End.

定理 4 解 a がウルトラ完全数 II 型で $m = 0$ のとき解が P の倍数なら a は P のべきになる.

Proof.

解 a は P の倍数と仮定したので, $a = P^e L, (P \nmid L)$ と書ける $W = P^{e+1} - 1$ とおくと
とき, $A = \sigma(a) = \frac{W\sigma(L)}{\bar{P}}$.

$W_0 = 1 + P + P^2 + \cdots + P^e$ とおくと, $W_0 = \frac{W}{\bar{P}}$.

$A = \sigma(a) = W_0\sigma(L)$ によって, $L > 1$ を仮定すると, $\sigma(L) \geq 1 + L$.

$$\sigma(A) \geq 1 + A + \sigma(L) > 1 + W_0\sigma(L) + L.$$

\bar{P} を乗じると,

$$\bar{P}\sigma(A) > \bar{P} + \bar{P}W_0\sigma(L) + \bar{P}L = \bar{P} + W\sigma(L) + \bar{P}L.$$

一方, $W = P^{e+1} - 1$ により,

$$\begin{aligned} aP + P - 2 &= P^{e+1}L + P - 2 \\ &= (W + 1)L + P - 2 \end{aligned}$$

かくして

$$\begin{aligned} aP + P - 2 &= \bar{P}\sigma(B) \\ &\geq \bar{P}(B + 1) \\ &= \bar{P}\sigma(A) \\ &> \bar{P} + \bar{P}W_0\sigma(L) + \bar{P}L \\ &= \bar{P} + W\sigma(L) + \bar{P}L. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(W + 1)L + P - 2 \geq \bar{P} + W\sigma(L) + \bar{P}L > P + 1 + WL + W + \bar{P}L.$$

これは矛盾.

End

したがって, このとき $A = \sigma(a) = W_0$ は素数になりこれは一般メルセンヌ素数.
証明はスーパー完全数の場合とほぼ同じであった.

12 合流型のスーパー完全数

スーパー完全数において平行移動をうまく取るとスーパー双子素数が出てくる現象は興味深いものがある。しかし、 $P > 2$ では $P = 3, m = -8$ の場合しか出ない。これは失望させる事態である。

実は高橋の研究で合流型の完全数を調べた例があった。そこで合流型のスーパー完全数を考えてみた。合流型のスーパー完全数ではスーパー双子素数が出てくる。

13 平行移動 m , 素数 P を底とする合流型のスーパー完全数

底を素数 P とし, 平行移動 m の合流型のスーパー完全数 (Superperfect numbers of confluent type) の定義は次の通り。

$a = P^e$ において, 平行移動のパラメタを m とするとき $q = P\varphi(a) + m + 1$ を素数と仮定する。したがって $\sigma(q) = q + 1$ となる。

あらためて, $A = P\varphi(a) + m + 1$ とおき, $\sigma(A) = q + 1$ に注目する。

$\bar{P} = P - 1$ とおくと, $P\varphi(a) = \bar{P}a$ に注意すれば

$$\sigma(A) = q + 1 = \bar{P}a + m + 2$$

そこで, $a = P^e$ をすっかり忘れて

定義 3 $A = P\varphi(a) + m + 1, \sigma(A) = q + 1 = \bar{P}a + m + 2$ を m だけ平行移動した素数 P を底とする平行移動 m の合流型スーパー完全数の連立方程式, その解を 平行移動 m , 素数 P を底とする合流型スーパー完全数という。

A は P を底とするスーパー完全数 a のパートナーと呼ばれる。

次の結果は水谷一による。

補題 4 P を底とする平行移動 m の合流型スーパー完全数が $a = P^e$ と書けるときのパートナー A は素数になる。

Proof.

$a = P^e$ なら $P\varphi(a) = \bar{P}a$ が成り立つので, 定義式 $A = P\varphi(a) + m + 1, \sigma(A) = \bar{P}a + m + 2$ を参照すると

$$A = P\varphi(a) + m + 1 = \bar{P}a + m + 1 = \sigma(A) - 1.$$

$A = \sigma(A) - 1$ によって, A は素数。

End

この逆もなりたつ。

補題 5 P を底とする平行移動 m の合流型スーパー完全数のパートナー A は素数になるとき, $a = P^e$ と書ける。

Proof. A は素数なので $A = \sigma(A) - 1$. これより $P\varphi(a) = \overline{P}a$. すると, $P|a$ なので, $a = P^e L, (P \nmid L)$. これより, $L = 1$.

End

14 例

$P = 3, m = 2$ の合流型完全数でもよいが結果が簡単になりすぎる. そこで $P = 3, m = 14$ の合流型完全数を取り上げる.

表 15: $P = 3, m = 14$ 合流型スーパー完全数 I $\varphi(a)$ と $\sigma(a)$ の組み合わせ

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
12	$2^2 * 3$	27	3^3	41	41
20	$2^2 * 5$	39	$3 * 13$	57	$3 * 19$
28	$2^2 * 7$	51	$3 * 17$	73	73
52	$2^2 * 13$	87	$3 * 29$	121	11^2
68	$2^2 * 17$	111	$3 * 37$	153	$3^2 * 17$
76	$2^2 * 19$	123	$3 * 41$	169	13^2
116	$2^2 * 29$	183	$3 * 61$	249	$3 * 83$
172	$2^2 * 43$	267	$3 * 89$	361	19^2
188	$2^2 * 47$	291	$3 * 97$	393	$3 * 131$
212	$2^2 * 53$	327	$3 * 109$	441	$3^2 * 7^2$
268	$2^2 * 67$	411	$3 * 137$	553	$7 * 79$
292	$2^2 * 73$	447	$3 * 149$	601	601
356	$2^2 * 89$	543	$3 * 181$	729	3^6
388	$2^2 * 97$	591	$3 * 197$	793	$13 * 61$

表を参考にして, $a = 4p$ ($p > 2$:素数) とする.

方程式は $A = P\varphi(a) + m + 1 = 3\varphi(4p) + 15 = 6p + 9, \sigma(A) = \overline{P}a + m + 2 = 8p + 16$.

$A = 6p + 9 = 3Q, Q = 2p + 3$ とおき, 取りあえず, Q は奇数なのでこれを素数と仮定してみる. すると $(p, Q = 2p + 3)$ はスーパー双子素数.

$A = 3Q$ なので, $\sigma(A) = 4(Q + 1), \overline{P}a + m + 2 = 8p + 16 = 4(Q - 3) + 16 = 4Q + 4$.

ゆえに $\sigma(A) = \overline{P}a + m + 2$ が成り立ち,

$(p, Q = 2p + 3)$ がスーパー双子素数なら $a = 4p$ は $P = 3, m = 14$ の合流型スーパー完全数になる.

この逆が次の形で成り立つ.

定理 5 $a = 4p$ は $P = 3, m = 14$ の合流型スーパー完全数とすると, $A = 3Q$ となる. $(p, Q = 2p + 3)$ はスーパー双子素数になる.

$A = 6p + 9 = 3Q, Q = 2p + 3$ とおくことはできる. 最初に $3, Q$ は互いに素とする.
 $\sigma(A) = 4\sigma(Q), \sigma(A) = 8p + 16 = 4 * 2p + 16 = 4(Q - 3) + 16 = 4Q + 4$ により
 $\sigma(Q) = Q + 1$. よって, Q : 素数.

さて次に $3, Q$ は互いに素を仮定しない.
 $Q = 3^\epsilon q$. ここで $3, q$ は互いに素とする.
 $A = 6p + 9 = 3Q = 3^{\epsilon+1}q$ により, $2\sigma(A) = (3^{\epsilon+2} - 1)\sigma(q)$ となる.

$N = 3^{\epsilon+2} - 1 = 9N_0 - 1, (N_0 = 3^\epsilon)$. よって, $2\sigma(A) = (9N_0 - 1)\sigma(q)$.
 $2p = 3^\epsilon q - 3$ により

$$2\sigma(A) = 16p + 32 = 8(3^\epsilon q - 3) + 32 = 8(3^\epsilon q + 1) = 8(N_0 q + 1).$$

$(9N_0 - 1)\sigma(q) = 8(N_0 q + 1)$ がでて, N_0 で整理すると,

$$(9N_0 - 1)\sigma(q) = 8(N_0 q + 1) = 8N_0 q + 8.$$

$q > 1$ とすると, $\sigma(q) > q$. それゆえ

$$8N_0 q + 8 = (9N_0 - 1)\sigma(q) \geq (9N_0 - 1)(q + 1) = 9qN_0 - q + 9N_0 - 1.$$

$$0 \geq 9qN_0 - q + 9N_0 - 1 - 8N_0 q - 8 = N_0 q - 9 - q + 9N_0 = q(N_0 - 1) - 9 + 9N_0 = (N_0 - 1)(9 + q).$$

ゆえに $N_0 = 1; Q = q > 3$: 素数.

$q = 1$ とすると, $\sigma(q) = q = 1$. それゆえ $(9N_0 - 1)\sigma(q) = 8(N_0 q + 1)$ に代入して,
 $9N_0 - 1 = 8(N_0 + 1)$. かくして, $N_0 = 9$.

よって, $N_0 = 9, q = 3, p = 3$. 故に, $a = 4p = 12, A = 3^3$.

End

完全数と双子素数は, 一般の数学愛好家にもよく知られた概念だが完全数の一般化と双子素数の一般化がこのように結びついたのである. このことに私は狂喜したのである.

参考文献

- [1] 高木貞治, 初等整数論講義第2版, 共立出版社, 1971.
- [2] 飯高茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V)』 現代数学社, 2016, 2017, 2018.
- [3] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.
- [4] Antal Bege and Kinga Fogarasi, Generalized perfect numbers, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73-82.

- [5] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1