## 1. 完全数

$m$ だけ平行移動した完全数とは $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす自然数 $a$.

## 2. スーパー完全数

$m$ だけ平行移動した完全数の A 型解 は $\alpha = 2^e q$ と書ける.
2 べき部分 ($2^e$) と素数部分 ($q$: メルセンヌ素数という) に分解する

これらを独立に調べる.
$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e$ を $m$ だけ平行移動した 狭義のスーパー完全数という.
$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e$ の満たす方程式
$2^{e+1} - 1 = \sigma(a)$ なので, $A = \sigma(a) + m$ は素数.

したがって $\sigma(A) = A + 1 = 2a + m$.
2 つの式 $A = \sigma(a) + m$ , $\sigma(A) = 2a + m$ は
$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e$ を元にして作ったのだが式の成り立ちの経緯をすっかり忘れ

$a, A$ を未知数として
$A = \sigma(a) + m$ , $\sigma(A) = 2a + m$ を
連立方程式と見なす.

**Definition 1.** $A = \sigma(a) + m$ , $\sigma(A) = 2a + m$ を満たす自然数 $a$ と $A$ について $a$ を $m$ だけ平行移動した 広義のスーパー完全数, $A$ をそのパートナーと呼ぶ.

**Proposition 1.** $a = 2^e$ なら $A$: 素数.

スーパー完全数は $m = 0$ のとき 1969 年に Suryanaryana によって導入され, その定義は $\sigma^2(a) = 2a$
スーパー完全数 $a$ が偶数なら, $a$ は完全数の 2 べき部分になる (Euler の定理の類似)

Table 1. $m = 1$ のときのスーパー完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | $A$ の素因数分数 |
|---|---|---|---|
| $m = 1$ | | | |
| 15 | $3 * 5$ | 25 | $5^2$ |
| 190 | $2 * 5 * 19$ | 361 | $19^2$ |
| 36856 | $2^3 * 17 * 271$ | 73441 | $271^2$ |

$m = 1$ のとき表によると $a = 2^e * p * q, A = q^2, (p, q:$ 素数) の形をしている.
さらに $p = 2^{e+1} + 1$, (フェルマ素数) , $q = p(p-1) - 1$ (超フェルマ素数).

Table 2. 超フェルマ素数

| $e$ | N=$2^{e+1}+1$ | | | $W=N(N-1)-1$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 17 | 17 | Fermat P | 271 |
| 5 | 65 | $5*13$ | | 4159 |
| 9 | 1025 | $5^2*41$ | | 1049599 |
| 15 | 65537 | 65537 | Fermat P | 4295032831 |
| 22 | 16777217 | $97*257*673$ | | 281474993487871 |

Table 3. $m=1$ のときのスーパー完全数の構成素因子

| $e$ | $p=2^{e+1}+1$ | 素因数分解 | $q=p(p-1)-1$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | 5 | 19 | 19 |
| 3 | 17 | 17 | 271 | 271 |
| 15 | 65537 | 65537 | 4295032831 | 4295032831 |

$m=1$ のときのスーパー完全数としてえられたこれら 4 個の数は珠玉のような数と言ってよいだろう.

フェルマ素数は 5 個しか知られていない. 超フェルマ素数はもう少し多い.

次の結果が得られる.(梶田光)(小学 5 年生)

**Theorem 1.** *平行移動 $m$ のスーパー完全数において $a=2^e*p*q, A=q^2, (p,q:$ 素数$)$ を仮定する $m=1$.*

## 3. スーパーメルセンヌ完全数

スーパー完全数 の導入の 50 年後に完全数 $\alpha=2^eq$ の素数部分 ($q$: メルセンヌ素数という) を取り出しスーパーメルセンヌ完全数 の概念ができた.

$a=2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $\sigma(a)=a+1$ となる.

$\sigma(a)=a+1=2^{e+1}+m$ になり $A=\sigma(a)-m$ とおくとき $A=2^{e+1}$.

$a+1=2^{e+1}+m$ により

$$\sigma(A)=2^{e+2}-1=2*2^{e+1}-1=2a-2m+1$$

**Definition 2.** $A=\sigma(a)-m$ , $\sigma(A)=2a-2m+1$ を満たす自然数 $a$ と $A$ について

$a$ を $m$ だけ平行移動した スーパーメルセンヌ完全数,$A$ をそのパートナーと呼ぶ.

**Proposition 2.** *$a$ が素数なら $A$ は 2 べき. 逆も正しい. (ただし概完全数予想を使う :$\sigma(a)=2a-1 \Rightarrow a=2^e$)*

$m = 0$ のときスーパーメルセンヌの式は $\sigma^2(a) = 2a + 1$.
この解はメルセンヌ素数になると予想される.
$(A = \sigma(a)$ が偶数を仮定してもよい.)

[
Table 4. スーパーメルセンヌ完全数 ,$m = -10, -9$

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m = -10$ | | | |
| 第 1 ブロック | GC 型 | | |
| 5 | 5 | 16 | $2^4$ |
| 53 | 53 | 64 | $2^6$ |
| 1013 | 1013 | 1024 | $2^{10}$ |
| 18 | $2 * 3^2$ | 49 | $7^2$ |
| $m = -9$ | | | |
| 51 | $3 * 17$ | 81 | $3^4$ |
| 537 | $3 * 179$ | 729 | $3^6$ |
| 4911 | $3 * 1637$ | 6561 | $3^8$ |
| 44277 | $3 * 14759$ | 59049 | $3^{10}$ |

$m = -9$ の場合には $a = 3p, p(\neq 2, 3)$ : 素数, $A = 3^e$ となる解が 4 個ある. このことはパソコンを用いて確認されている.

スーパーメルセンヌ完全数は本来の定義に基づけば $m$ が偶数の場合にのみ考えるべきである.

$m$ が奇数の場合は解が少ないが $m = -9$ の場合には $a = 3p, p(\neq 2, 3)$ : 素数, $A = 3^e$ となる

解が 4 個もある実に不思議なことだ.

**Proposition 3.** $4p + 13 = 3^e$ を満たすとき $a = 3p, (p \neq 2, 3)$ は $A = \sigma(a) + 9, \sigma(A) = 2a + 19$ を満たす.

Table 5. $m = -9$ のときのスーパーメルセンヌ完全数 $a = 3p, A = 3^e$

| $e$ | $3 * p$ |
|---|---|
| 4 | $51 = 3 * 17$ |
| 6 | $537 = 3 * 179$ |
| 8 | $4911 = 3 * 1637$ |
| 10 | $44277 = 3 * 14759$ |
| 12 | $398571 = 3 * 132857$ |
| 88 | $3 * 242443432446880900719205485541020203890037$ |

**Theorem 2.** $m = -9$ のスーパーメルセンヌ完全数は $a = 3p$ を仮定すると $A = 3^e$ を導くことができる. ただし底 *3* についての概完全数仮説を使う.

これより, $3A-1=2\sigma(A)$. 次の概完全数仮説を使う.

**Remark 1.** 素数 $p$ について $(p-1)\sigma(a)=ap-1$ が成り立てば $a$ は $p$ のべき.

ただし, $p=2,3$ には反例が知られていないが,$a$ が 100 万以下では次の反例がある.

- $p=5$ のとき $a=7*11$
- $p=7$ のとき $a=97783=7*61*229$
- $p=11$ のとき $a=611=13*47$
- $p=17$ のとき $a=1073=29*37$, $a=2033=19*107$