差回文について

神戸 勇輝
学習院大学理学部

November 18, 2010

目次

1 目的

G 進数について差をとることで回文を作ることを考える。

ある自然数 A に対し、1 の位から逆に並べ替えた数を B とおく。$|A-B|$ を改めて A として繰り返し回文になると終了とする。しかし、回文になるとは限らないことがわかった。

例を 2 つ挙げる (ここでは 10 進法で考える)

- **$A=562$ の場合**

  このとき、$B=265$ となり、

  $D_1=562-265=297.$

  さらに、$D_2=792-297=495,$

  $D_3=594-495=99,$

  となり、回文となった。

- **$A=1012$ の場合**

  $B=2101$

  $D_1=2101-1012=1089.$

  さらに、

  $D_2=9801-1089=8712,$

  $D_3=8712-2178=6534,$

  $D_4=6534-4356=2178,$

  $D_5=8712-2178=6534,$ となる。ここで、$D_3=\quad 6534\quad$ と同じになったので循環する。

2 方法

```
/**リストの結合**/

append0(Z = [] + Z).
append0([A|Z] = [A|X] + Y):- append0(Z=X+Y).



/**G 進数の数を 10 進数に変換**/

dec10(N,[N],G):- N<G,!.
dec10(N,L,G):-
    N1 is N//G, R is N mod G,
    dec10(N1,L1,G),
    append0(L=L1+[R]).



/**10 進数の数を G 進数に変換**/

bec10(N,[N],G):-!.
bec10(N,L,G):- append0(L=L1+[A]),
    bec10(N1,L1,G),
    N is N1*G+A.



/**リストの和、差**/

listsum(C=A+B,G):-
    bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na+Nb,
    dec10(Nc,C,G).

listdif(C=A-B,G):-
    bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na-Nb,
    dec10(Nc,C,G).
```

```
/**差回文**/

:-dynamic sk/1.

go:-abolish(sk/1),asserta(sk([])).

sakaibun(N,A,G):-
    reverse(A,B),
    ((B==A) -> (N=0);
               (bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),((Na >= Nb) -> (listdif(C=A-B,G));
                                                            (listdif(C=B-A,G))))),
    \+ sk(C) -> (write(C),asserta(sk(C)),(sakaibun(N1,C,G)));
                (go,!).



/**1～1000 までの差回文で循環する数を出力**/

sakaibun1(N,A,G,D):-

reverse(A,B),((A==B)-> (D=0,go,!);(
bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),
(   (Na >= Nb) -> (listdif(C=A-B,G),bec10(Nc,C,G)) ; ((listdif(C=B-A,G),bec10(Nc,C,G)))),
(   \+ sk(C) ->( asserta(sk(C)),sakaibun1(N1,C,G,D));(D=1,go,!)))).


sakaibun2(N,A,G,D):-
   (   ( bec10(Na,A,G),Na2 is Na+1,   Na2 =< 1000) ->
   ((dec10(Na2,A2,G),sakaibun1(N,A2,G,D)),
   ((D==0) -> sakaibun2(N2,A2,G,D1);(write(A2),sakaibun2(N2,A2,G,D1))))
   ;(go,!)).



/**差回文を 10 進数の A～1000 まで計算してその中で循環する周期を出力**/

:-dynamic sksin/1.

saka1(N,A,G):-
    reverse(A,B),
    ((A==B) -> (go,!);
               (bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),
                ((Na >= Nb) -> listdif(C=A-B,G);
```

```
                                        (listdif(C=B-A,G))),
                                         (\+ sk(C) -> (asserta(sk(C)),saka1(N1,C,G));
                                                     (\+ sksin(C) -> (write(C),asserta(sksin(C)),go,!);
                                                                     (go,!))))).


saka(N,A,G):-
    ((bec10(Na,A,G),Na2 is Na+1,Na2 =< 1000)->
                  (dec10(Na2,A2,G),saka1(N,A2,G),saka(N2,A2,G));
                  (go,!)).
    /**\uparrow 1000の数字を変えれば計算したい値の範囲が変わる**/
```

3　結果

表 1: 差回文かどうか（10 進数）

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
$9 \times 1 = 9$				
$9 \times 2 = 18$	63	27	45	9
$9 \times 3 = 27$	45	9		
$9 \times 4 = 36$	27	45	9	
$9 \times 5 = 45$	9			
$9 \times 6 = 54$	9			
$9 \times 7 = 63$	27	45	9	
$9 \times 8 = 72$	45	9		
$9 \times 9 = 81$	63	27	45	9
$99 \times 1 = 99$				
$99 \times 2 = 198$	693	297	495	99
$99 \times 3 = 297$	495	99		
$99 \times 4 = 396$	297	495	99	
$99 \times 5 = 495$	99			
$99 \times 6 = 594$	99			
$99 \times 7 = 693$	297	495	99	
$99 \times 8 = 792$	495	99		
$99 \times 9 = 891$	693	297	495	99

表 2: 循環する数（10 進数）

元の整数の桁数	循環する数	どのような循環か
4 桁	$1012, 1023, 1034, 1045, 1067, 1078, 1089, 1100, 1122, 1133, 1144, 1155, 1177, 1188, 1199, 1210, 1232, 1243, 1254, 1265, 1287, 1298, 1320, 1342, 1353, 1364, 1375, 1397, 1408, 1430, 1452, 1463, 1474, 1485, 1507, 1518, 1540, 1562, 1573, 1584, 1595, 1606, 1617, 1628, 1650, 1672, 1683, 1694, 1705, 1716, 1727, 1738, 1760, 1782, 1793, 1815, 1826, 1837, 1848, 1870, 1892, 1903, 1925, 1936, 1947, 1958, 1980, \cdots$	$2178 \to 6534 \to 2178 \to \cdots$
5 桁	$10013, 10016, 10019, 10020, 10021, 10025, 10030, 10031, 10032, 10036, 10039, 10040, 10041, 10044, 10046, 10048, 10049, 10050, 10051, 10062, 10063, 10064, 10066, 10068, 10070, 10071, 10072, 10073, 10076, 10080, 10081, 10082, 10087, 10090, 10091, 10093, 10096, 10099, 10113, 10116, 10119, 10120, 10121, 10125, 10130, 10131, 10132, 10136, 10139, 10140, 10141, 10144, 10146, 10148, 10149, 10150, 10151, 10162, 10163, 10164, 10166, 10168, 10170, 10171, 10172, 10173, 10176, 10180, 10181, 10182, 10187, 10190, 10191, 10193, 10196, 10199, 10213, 10216, 10219, 10220, 10221, 10225, 10230, 10231, 10232, 10236, 10239, 10240, 10241, 10244, 10246, 10248, 10249, 10250, 10251, 10262, 10263, 10264, 10266, 10268, 10270, 10271, 10272, 10273, 10276, 10280, 10281, 10282, 10287, 10290, 10291, 10293, 10296, 10299, 10313, 10316, 10319, 10320, 10321, 10325, 10330, 10331, 10332, 10336, 10339, 10340, 10341, 10344, 10346, 10348, 10349, 10350, 10351, 10362, 10363, 10364, 10366, 10368, 10370, 10371, 10372, 10373, 10376, 10380, 10381, 10382, 10387, 10390, 10391, 10393, 10396, 10399, 10413, 10416, 10419, 10420, 10421, 10425, 10430, 10431, 10432, 10436, 10439, 10440, 10441, 10444, 10446, 10448, 10449, 10450, 10451, 10462, 10463, 10464, 10466, 10468, 10470, 10471, 10472, 10473, 10476, 10480, 10481, 10482, 10487, 10490, 10491, 10493, 10496, 10499, \cdots$	$2178 \to 6534 \to 2178 \to \cdots$
5 桁	$10012, 10023, 10034, 10045, 10067, 10078, 10089, 10112, 10123, 10134, 10145, 10167, 10178, 10189, 10212, 10223, 10234, 10245, 10267, 10278, 10289, 10312, 10323, 10334, 10345, 10367, 10378, 10389, 10412, 10423, 10434, 10445, 10467, 10478, 10489, \cdots$	$21978 \to 65934 \to 21978 \to \cdots$

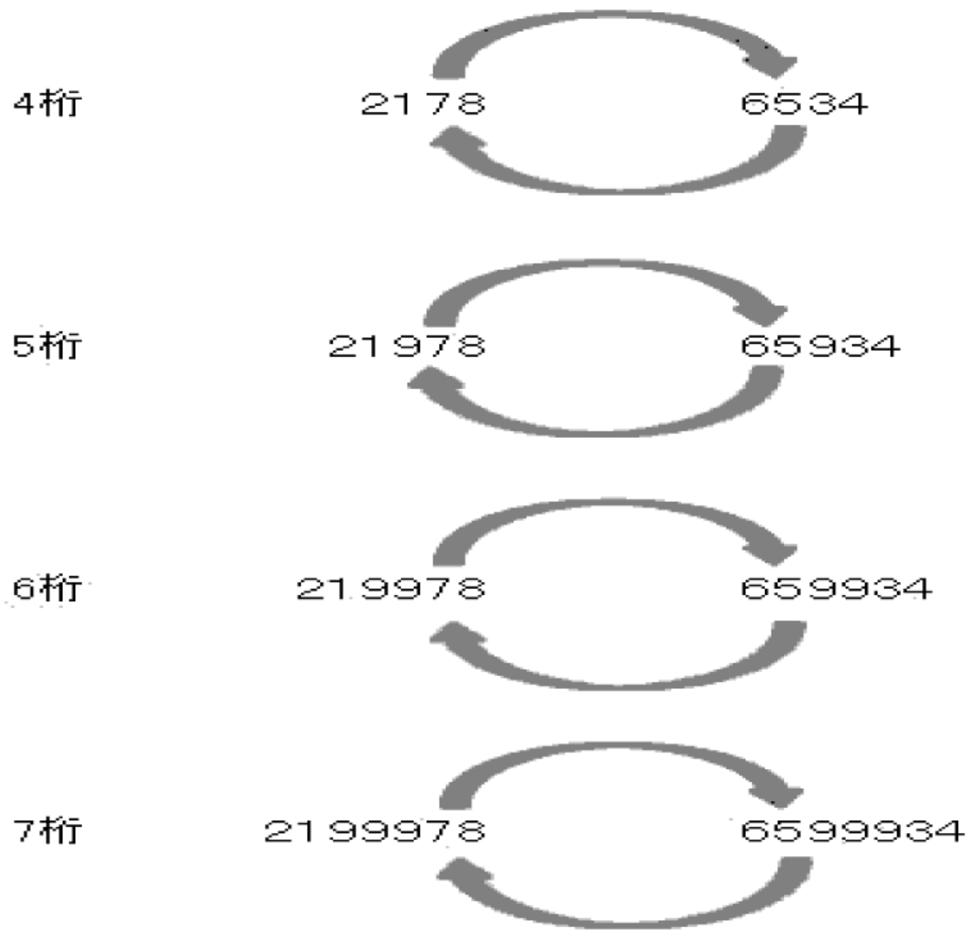
4桁
2178
6534
5桁
21978
65934
6桁
219978
659934
7桁
2199978
6599934

図 1: 4 桁の循環

表 3: N 進数の循環 (1〜300 までの中で)

N 進数	循環する数	どのような循環か
3 進数	1012, 1100, 1122, 1210, 2101, 2200, 2211, 10020, 10021, 10120, 10121, 10220, 10221, 12001, 12002, 12101, 12102, 12201, 12202, 20010, 20021, 20022, 20110, 20121, 20122, 20210, 20221, 20222, 21020, 21120, 21220, 22002, 22102, 22202, 100110, 100111, 100121, 100201, 101210, 101211, 101221, 102001, $\cdots$	$1012 \to 1012 \to \cdots$
	10012, 10112, 10212, 11000, 11022, 11100, 11122, 11200, 11222, 12010, 12110, 12210, 21001, 21101, 21201, 22000, 22011, 22100, 22111, 22200, 22211, 100020, 100021, 100102, 100112, 100122, 101000, 101020, 101021, 101120, 101121, 101202, 101212, 101222, $\cdots$	$10212 \to 10212 \to \cdots$
	100012, 101012, 101112, $\cdots$	$102212 \to 102212 \to \cdots$
5 進数	13, 20, 24, 31, 40, 42, 1011, 1101, 1121, 1211, 1231, 1321, 1341, 1431, 2012, 2102, 2122, $\cdots$	$13 \to 13 \to \cdots$
	103, 113, 123, 133, 143, 200, 204, 210, 214, 220, 224, 230, 234, 240, 244, 301, 311, 321, 331, 341, 400, 402, 410, 412, 420, 422, 430, 432, 440, 442, 1014, 1022, 1030, 1031, 1043, 1124, 1132, 1140, 1141, 1200, 1234, 1242, 1301, 1302, 1310, 1344, 1411, 1412, 1420, 2023, 2031, 2032, 2044, 2133, 2141, 2142, $\cdots$	$143 \to 143 \to \cdots$
	1003, 1113, 1223, 1303, 1333, 1413, 1443, 2000, 2004, 2030, 2110, 2114, 2140, $\cdots$	$1443 \to 1443 \to \cdots$
	1012, 1023, 1100, 1103, 1122, 1133, 1210, 1213, 1232, 1243, 1320, 1323, 1342, 1403, 1430, 1433, 2010, 2013, 2024, 2040, 2101, 2104, 2120, 2123, 2134, 2200, $\cdots$	$1034 \to 3212 \to 1034 \to \cdots$
	10012, 10023, 10112, 10123, 10212, 10223, 10312, 10323, $\cdots$ (1000 までの中に)	$10434 \to 32412 \to 10434 \to \cdots$
6 進数	1012, 1023, 1045, 1100, 1122, 1133, 1155, 1210, $\cdots$	$2134 \to 2134 \to \cdots$
	10012, 10023, 10045, 10112, 10123, 10145, 10212, 10223, 10245, 10312, 10323, 10345, 10412, 10423, 10445, 10512, 10523, $\cdots$ (1500 までの中に)	$21534 \to 21534 \to \cdots$
7 進数	1012, 1022, 1036, 1043, 1045, 1100, 1104, 1122, 1132, 1146, 1153, 1155, 1200, 1206, 1210, 1214, 1232, 1242, 1256, 1263, 1265, 1310, $\cdots$ (500 までの中に)	$1056 \to 5412 \to 3234 \to 1056 \to \cdots$
	10012, 10022, 10036, 10043, 10045, 10112, 10122, 10136, 10143, 10145, $\cdots$ (2500 までの中に)	$10656 \to 54612 \to 32634 \to 10656 \to \cdots$
8 進数	14, 17, 25, 30, 36, 41, 47, 52, 60, 63, 71, 74, $\cdots$	$25 \to 25 \to \cdots$
	104, 107, 114, 117, 124, 127, 134, 137, 144, 147, 154, 157, 164, 167, 174, 177, 205, 215, 225, 235, 245, 255, 265, 275, 300, 306, 310, 316, 320, 326, 330, 336, 340, 346, 350, 356, 360, 366, 370, 376, 401, 407, 411, 417, 421, 427, 431, 437, 441, 447, 451, $\cdots$	$275 \to 275 \to \cdots$

表 4: N 進数の循環 (1〜300 までの中で)2

N 進数	循環する数	どのような循環か
9 進数	1034, 1067, 1105, 1144, 1177, 1215, 1254, 1287, 1325	$3256 \to 3256 \to \cdots$
	10034, 10067, 10134, 10167, 10234, 10267 $\cdots$ (6800 までの中で)	$32856 \to 32856 \to \cdots$
	13, 14, 15, 18, 20, 24, 25, 26, 30, 31, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 57, 58, 62, 63, 64, 68, 70, 73, 74, 75, 81, 84, 85, $\cdots$	$17 \to 53 \to 17 \to \cdots$
	103, 104, 105, 108, 113, 114, 115, 118, 123, 124, 125, 128, 133, 134, 135, 138, 143, 144, 145, 148, 153, 154, 155, 158, 163, 164, 165, 168, 173, 174, 175, 178, 183, 184, 185, 188, 200, 204, 205, $\cdots$	$187 \to 583 \to 187 \to \cdots$
	1003, 1004, 1005, 1008, 1014, 1015, 1027, 1044, 1057, 1072, 1074, 1086, 1087, 1103, 1113, 1114, 1115, 1118, 1124, 1125, 1137, 1154, $\cdots$	$1887 \to 5883 \to 1887 \to \cdots$
	1012, 1017, 1045, 1062, 1084, 1100, 1122, 1127, 1155, 1172, 1210, 1232, 1237, 1265, 1282, 1308, 1320, $\cdots$ (1000 までの中に)	$1078 \to 7612 \to 5434 \to 1078 \to \cdots$
	10012, 10017, 10045, 10062, 10084, 10112, 10117, 10145, 10162, 10184, 10212, 10217, 10245, 10262, $\cdots$ (6800 までの中に)	$10878 \to 76812 \to 54834 \to 10878 \to \cdots$

4 考察

4.1 10 進数の場合

1. 2 桁、3 桁の整数

   このときかならず回文になる。

   ＜証明＞

   - 2 桁のとき

     ある 2 桁の数 $A = 10a + b$ があったとする。($a \geq b$ とおく) $B = 10b + a$ なので、

     $D_1 = A - B = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b).$

     よって、D_1 の値は $a - b$ の値によって決まる。($1 \leq a - b \leq 9$, $a - b = 0$ のときは元々回文)

     ここで、表 1 より $a - b = 1 \sim 9$ のどの場合でも差回文の操作の後、回文になる。$a < b$ のときは $D_1 = B - A = 9(b - a)$ となり、同様に回文になる。

     よって、2 桁の整数の場合は回文になる。

   - 3 桁のとき

     ある 3 桁の数 $A = 100a + 10b + c$ があったとする。($a \geq c$ とおく) $B = 100c + 10b + a$ なので、

     $D_1 = A - B = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c).$

     よって、D_1 の値は $a - c$ の値によって決まる。($1 \leq a - c \leq 9$, $a - c = 0$ のときは元々回文)

     ここで、表 1 より $a - c = 1 \sim 9$ のどの場合でも差回文の操作の後、回文になる。$a < c$ のときは $D_1 = B - A = 99(c - a)$ となり、同様に回文になる。

     よって、3 桁の整数の場合は回文になる。

2. 4 桁の整数

   差回文の操作を行うと表 2 のように循環が生じた。(表は $1000 \sim 2000$ の結果)

   しかし、どれも循環するパターンは全く同じで、図 1 に書いてあるように $2178 \to 6534 \to 2178 \to 6534 \to \cdots$ の 2 回の周期となった。

   4 桁の整数のとき差回文の操作の後、回文にはならないときは必ず $2178 \to 6534$ を繰り返す。

   ＜証明＞

   4 桁のある数を $A = 1000a + 100b + 10c + d$ とおく。($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$)

   $B = 1000d + 100c + 10b + a$ となる。

   (i) $a = d$ のとき

   $b \geq c$ なら、$D_1 = A - B = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 90(b - c)$

   これは、2 桁か 3 桁になるので、このまま差回文の操作の後、回文になる。$c > b$ の場合も、上の b と c を入れ替えれば、同様に回文となる。

(ii) $a > d$ のとき

$D_1 = A - B = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 999(a-d) + 90(b-c) = 9(111(a-d) + 10(b-c))$

いま、$a - d = 1$ の場合を考える。

- $b - c \leq 0$ のとき
  D_1 は 3 桁となるので、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 1$ のとき
  $D_1 = 9 \times 121 = 1089$
  $D_2 = 9801 - 1089 = 8712$
  $D_3 = 8712 - 2178 = 6534$
  よって、循環して回文にはならない。
- $b - c = 2$ のとき
  $D_1 = 9 \times 131 = 1179,\ D_2 = 9711 - 1179 = 8532,\ D_3 = 8532 - 2358 = 6174$
  $D_4 = 6174 - 4716 = 1458,\ D_5 = 8541 - 1458 = 7083,\ D_6 = 7083 - 3807 = 3276$
  $D_7 = 3447, D_8 = 3996, D_{10} = 4995, D_{11} = 999$
  よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 3$ のとき
  $D_1 = 9 \times 141 = 1269,$
  $D_2 = 5814, D_3 = 1629, D_4 = 7632, D_5 = 5265, D_6 = 360$
  これは 3 桁になったので、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 4$ のとき
  $D_1 = 9 \times 151 = 1359$
  $D_2 = 8172, D_3 = 5454, D_4 = 909$
  よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 5$ のとき
  $D_1 = 9 \times 161 = 1449$
  $D_2 = 7992, D_3 = 4995$
  これは $b - c = 2$ の D_{10} と同じ。よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 6$ のとき
  $D_1 = 9 \times 171 = 1539$
  $D_2 = 7812, D_3 = 5625$
  これは $b - c = 3$ の D_5 と同じ。よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 7$ のとき
  $D_1 = 9 \times 181 = 1629$
  $D_2 = 7632$
  これは $b - c = 3$ の D_4 と同じ。よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。
- $b - c = 8$ のとき
  $D_1 = 9 \times 191 = 1719$
  $D_2 = 7452, D_3 = 4905, D_4 = 189$
  これは 3 桁になったので、この整数は差回文の操作の後、回文になる。

- $b-c=9$ のとき
  $D_1 = 9 \times 201 = 1809$
  $D_2 = 7272, D_3 = 4545, D_4 = 909$
  よって、この整数は差回文の操作の後、回文になる。

$a-d \geq 2$ の場合も同様に進めていくと、$b-c=a-d$ のとき循環が生じる。

よって、$a+c=b+d$ のときすなわち、**元の数が 11 の倍数**の時に循環が生じる。

ただし、以下の 4 つの場合は回文となる。

- $a-d=b-c=5$ または $d-a=c-b=5$ のとき
  $D_1 = 9 \times 605 = 5445$
- $a-d=8$ かつ $c-b=3$ のとき、または $d-a=8$ かつ $b-c=3$ のとき
  $D_1 = 9 \times 858 = 7722, D_2 = 7722 - 2277 = 5445$

3. 5 桁の整数

   5 桁の循環をする $21978 \to 65934 \to 21978 \to 65934 \to \cdots$ の 2 回の繰り返しと 4 桁の循環をする数が出てきた。

   5 桁のとき $A = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ について、調べてみた。

   - 4 桁の循環をする数

     $a-e=0, b-d=\pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm7, \pm8, \pm9$ のとき

     $a-e=1, b-d=-9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, 3, 6, 7, 8$ のとき

     $a-e=2, b-d=-1, 1, 6, 7, 9$ のとき

     $a-e=3, b-d=-9, -7, -6, -5, -4, -2, -1, 4, 6$ のとき

     $a-e=4, b-d=-5, -3, -2, -1, 2$ のとき

     $a-e=5, b-d=-9, -7, -4, -3, -2, -1, 1, 3, 4, 6, 7, 9$ のとき

     $a-e=6, b-d=-9, -8, -7, -4, -2, 8$ のとき

     $a-e=7, b-d=-9, -8, -6, 4, 6$ のとき

     $a-e=8, b-d=-9, -7, -6, -5, -4, -2, -1, 1, 3, 4, 9$ のとき

     $a-e=9, b-d=2, 3, 4, 7$ のとき

     $e > a$ のときは a と e を入れ替えればよい。

   - 5 桁の循環をする数

     $a-e=1, b-d=1$ のとき

     $a-e=2, b-d=-9, 2$ のとき

     $a-e=3, b-d=3$ のとき

     $a-e=4, b-d=-7, 4$ のとき

     $a-e=5, b-d=-6$ のとき

     $a-e=6, b-d=-5, 6$ のとき

     $a-e=7, b-d=-4, 7$ のとき

     $a-e=8, b-d=8$ のとき

     $a-e=9, b-d=-2, 9$ のとき

     $e > a$ のときは a と e を入れ替えればよい。

この結果、5 桁の循環をする数は $a-e=b-d$ のときなど規則がありそうだが、4 桁の循環をする数は規則が分からなかった。

次の図は 5 桁のすべての数について差回文を計算していったときの場合である。

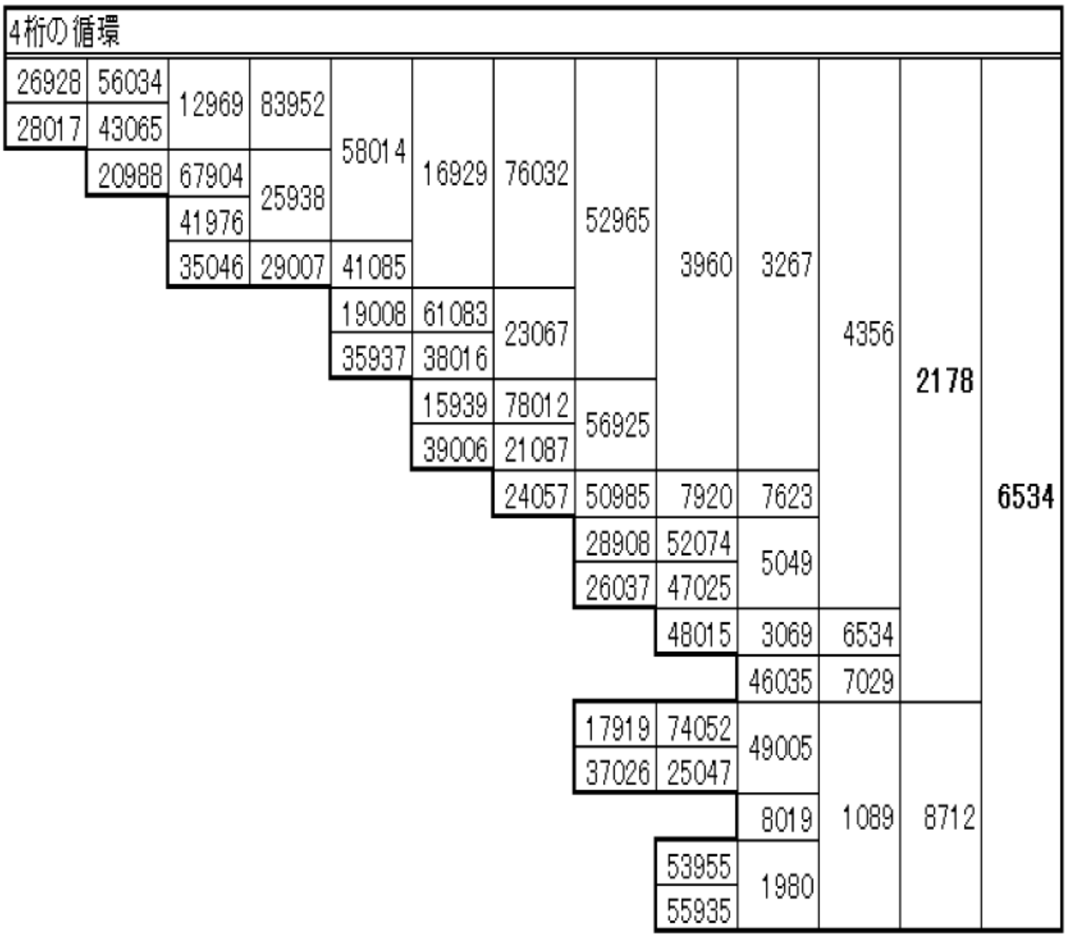

図 2: 4 桁の循環

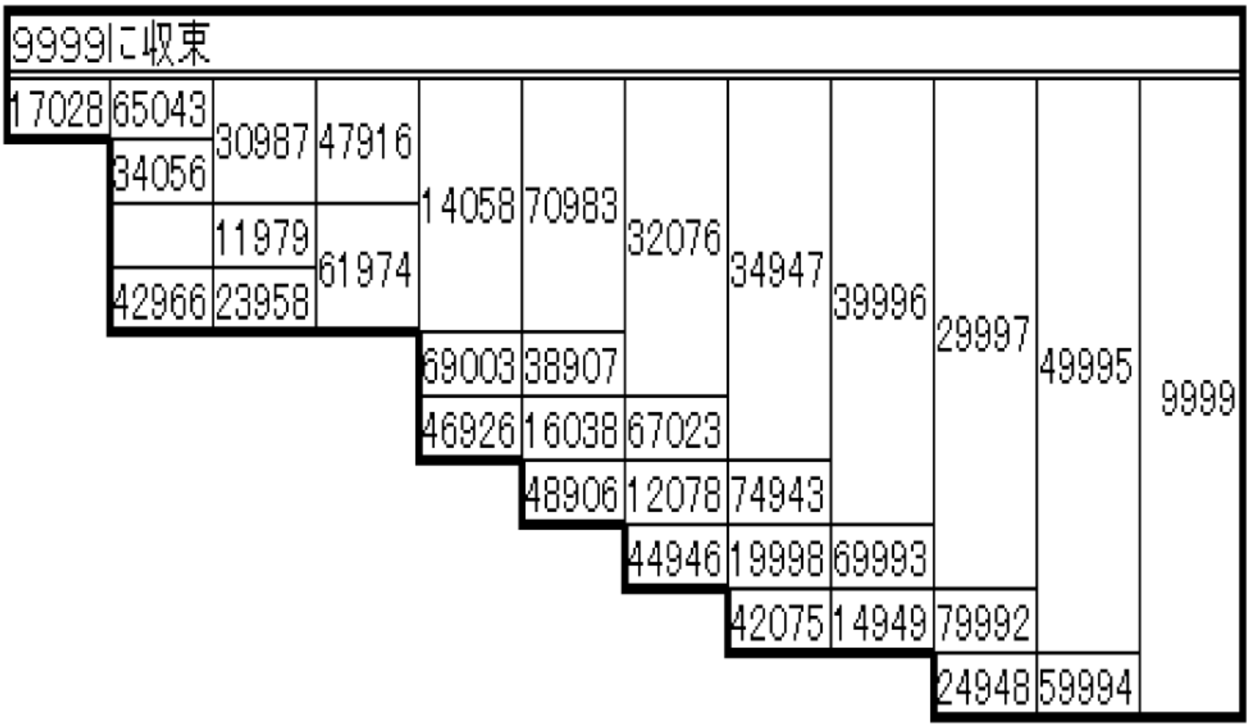

図 3: 9999 に収束

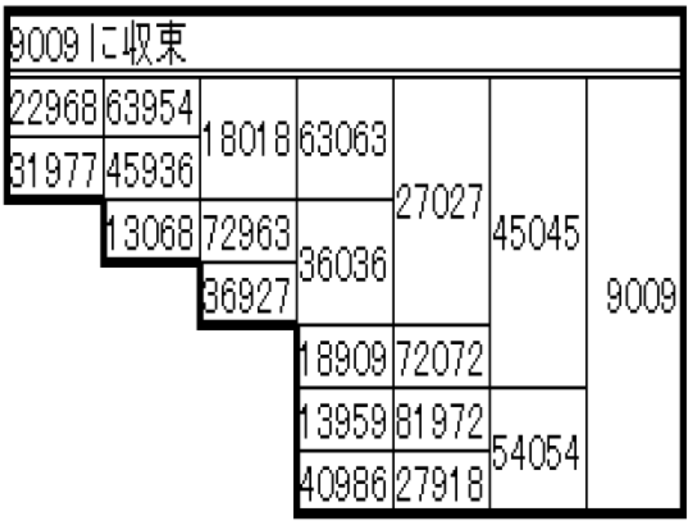

図 4: 9009 に収束

5445に収束		
51975	5940	5445
57915		

図 5: 5445 に収束

上の図のように 5 桁の数のすべてのパターンについて調べてみたが、これを見ても規則をみつけることができなかった。

4. 6,7 桁の整数

今までと同様に調べて行こうと思ったが、プログラムに工夫ができなくてプログラムを実行するのに時間がかかってしまい、調べることができなかった。

そこで、分かったところまで述べる。

- 6 桁について
  4 桁の循環 (2178 → 6534 → 2178 → ···) 10000〜100500 の中に 123 個 例 100105
  5 桁の循環 (21978 → 65934 → 21978 → ···) 10000〜100500 の中に 107 個 例 100013
  6 桁の循環 (219978 → 659934 → 219978 → ···) 10000〜100500 の中に 14 個 例 100012
- 7 桁について
  4 桁の循環 (2178 → 6534 → 2178 → ···) 10000〜100300 の中に 44 個 例 1000101
  5 桁の循環 (21978 → 65934 → 21978 → ···) 10000〜100300 の中に 6 個 例 1000110
  6 桁の循環 (219978 → 659934 → 219978 → ···) 10000〜100300 の中に 95 個 例 1000013
  7 桁の循環 (2199978 → 6599934 → 2199978 → ···) 10000〜100300 の中に 14 個 例 1000012

4.2　2 進数の場合

●定理
2 進数にの場合、差回文の操作をすると回文になった。
＜証明＞
ある 2 進数 A があったとする A の桁数を m とおく B の桁数を n とおくと
$m \geq n$
よって

- $A \geq B$ のとき $S_1 = A - B < A$
- $B \geq A$ のとき $S_1 = B - A$

  この S_1 は 2 進数なので桁数は $m-1$ 桁以下になる.

以上から S_1 は元の数 A より小さくなる この操作を繰り返して $S_2, S_3, S_4, \cdots$ と求めていくとどんどん小さくなっていきいずれ回文になる

4.3　3 進数の場合

表 3 のように 0〜300 個の間に $1012, 10212, 102212$ と循環する数が見つかった

1012 を例にして見てみると，$1012 \to 1012 \to 1012 \to \cdots$ という様に，これらは全て周期 1 で循環する

よって 3 進数の場合は差回文の操作をすると $102^{(n)}12$ になる数がある $(0 \leq n)$

$102^{(n)}12$ は循環する。

＜証明＞

$A = 102^{(n)}12$ とおく。$B = 212^{(n)}01$ となり、

$D_1 = B - A = 212^{(n)}01 - 102^{(n)}12 = 102^{(n)}12 = A$

よって、$A = 102^{(n)}12$ について差回文の操作をすると、必ず元の数になる。

他にも、10121012 のように循環する数を続けて書いた場合も循環が生じる。

4.4　4 進数の場合

循環する数があるかどうか、5000 個まで調べたが無かった。そして、なぜないのか証明しようとしたが良い方法が見つからず証明できなかった。

4.5　5 進数の場合

表 3 から分かるように 5 進数には循環するパターンが 2 つある。

- 1 つの数の繰り返し

  表 3 から $13, 143, 1443$ は循環する。証明は 3 進数のときと同様のため省略。

  よって、差回文の操作を行い $14^{(n)}3$ となる数は、$14^{(n)}3 \to 14^{(n)}3 \to \cdots$ のように周期 1 で循環する。

  上記の他にも、$1313, 13013, 130013, \cdots$ のように $130^{(n)}13$ や $13(143)^{(n)}13$ なども同じ数の繰り返しになる。

- 2 つの数の繰り返し

  表 3 から $1034, 10434$ や $3212, 32412$ は循環する。

  ＜証明＞

  $A = 104^{(n)}34$ のとき、$B = 434^{(n)}01$ となり、

  $D_1 = B - A = 434^{(n)}01 - 104^{(n)}34 = 324^{(n)}12$

  $D_2 = 324^{(n)}12 - 214^{(n)}23 = 104^{(n)}34 = A$

  よって、差回文の操作で $104^{(n)}34$ や $324^{(n)}12$ となる数は $104^{(n)}34 \to 324^{(n)}12 \to 104^{(n)}34 \to \cdots$ と周期 2 で循環する。

また、循環する数を組み合わせた 1314313 も循環が生じる。

4.6　6 進数の場合

表 3 のように 2134, 21534 は循環する

これから、差回文の操作をして $215^{(n)}34$ となる数は、$215^{(n)}34 \to 215^{(n)}34 \to \cdots$ のように周期 1 で循環する。証明は 3 進数のときと同様のため省略。

4.7　7 進数の場合

表 3 から、1056, 10656 や 5412, 54612、3234, 32634 は循環する。証明は上の時と同様のため省略。

よって、差回文の操作をして $106^{(n)}56$ や $546^{(n)}12$、$326^{(n)}34$ となる数は $106^{(n)}56 \to 546^{(n)}12 \to 326^{(n)}34 \to 106^{(n)}56 \to \cdots$ の周期 3 で循環する。

4.8　8 進数の場合

表 3 のように 25, 275 は循環する

これから、差回文の操作をして $27^{(n)}5$ となる数は、$27^{(n)}5 \to 27^{(n)}5 \to \cdots$ のように周期 1 で循環する。証明は 3 進数のときと同様のため省略。

4.9　9 進数の場合

表 4 から分かるように 9 進数には循環するパターンが 3 つある。

- 周期 1 の循環

  表 4 から、3256, 32856 は循環する。なぜ循環するかの証明は 3 進数のときと同様のため省略。

  よって、差回文の操作を行い $328^{(n)}56$ となる数は $328^{(n)}56 \to 328^{(n)}56 \to \cdots$ のように周期 1 で循環する。

- 周期 2 の循環

  表 4 から、17, 187, 1887 や 53, 583, 5883 は循環する。証明は上と同様のため省略。

  よって、, 差回文の操作を行い $18^{(n)}7$ や $58^{(n)}3$ となる数は $18^{(n)}7 \to 58^{(n)}3 \to 18^{(n)}7 \to \cdots$ のように周期 2 で循環する。

- 周期 3 の循環

  表 4 から、1078, 10878 や 7612, 76812、5434, 54834 は循環する。証明は上と同様のため省略。

  よって、差回文の操作を行い $108^{(n)}78$ や $768^{(n)}12$、$548^{(n)}34$ となる数は $108^{(n)}78 \to 768^{(n)}12 \to 548^{(n)}34 \to 108^{(n)}78 \to \cdots$ のように周期 3 で循環する。

4.10 G 進数について

G 進数（$G=3,5,6,7,8,9,10$）について考えてみると共通して、2 つの循環が生じる特徴が分かった。
2, 4 進数は差回文の循環は生じなかった。

- G 進数の循環してる数の各桁の数の和は、$G-1$ の倍数となっている。

  これは 10 進数に変換したときも $G-1$ の倍数であることを示す。

  例） 9 進数の循環する数 3256 について見ると、

  和は 16 で $G-1=8$ の倍数となっている。

  これを 10 進数に変換すると 2400 で 8 の倍数である。

- 8 進数は除く。ある数 A の各桁の数を左の方から $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ とおく。すべての $\alpha \leq n-1$ について

  $|a_\alpha - a_{\alpha+1}| = s \ (1 \leq s \leq G-1)$

  のとき、 A の差回文の操作を繰り返すと循環する。

  例） 9 進数で $A=7535$ について見ると

  $B=5357, D_1=21, D_2=5434, D_4=1078,$

  $D_5=7612, D_6=5434$

  となり循環した。

  ここで、循環の周期の数は表のようになっている。

表 5: 繰り返す周期の数

G 進数	3	5	6	7	9	10
周期の数	1	1 or 2	1	3	1 or 2 or 3	2

5 感想

1 年間このゼミを続けて、改めて数学の魅力を知りました。この差回文の研究をしていく過程で、まずはプログラムを作るのに非常に苦労しました。自分では出来たと思っていても実行してみるとなかなかうまく行かず何度もいやになりました。しかし、自力でがんばって成功したときの達成感がなんともいえませんでした。また、本格的な研究をしていき、多くのデータの中から数字の規則を発見したときはとても嬉しく思いました。
解けなかった証明などさらに詳しい研究をこれからの後輩に進めてもらいたいです。