

差回文について

学習院大学理学部  
神戸 勇輝

## 1. 目的

$G$ 進数について差をとることで回文を作ること考える。

ある自然数  $A$  に対し、1の位から逆に並べ替えた数を  $B$  とおく。 $|A - B|$  を改めて  $A$  として繰り返し回文になると終了とする。しかし、回文になるとは限らないことがわかった。

例を2つ挙げる(ここでは10進法で考える)

●  $A = 562$  の場合

このとき、 $B = 265$  となり、

$$D_1 = 562 - 265 = 297.$$

さらに、

$$D_2 = 792 - 297 = 495,$$

$$D_3 = 594 - 495 = 99,$$

となり、回文となった。

●  $A = 1012$  の場合

$$B = 2101$$

$$D_1 = 2101 - 1012 = 1089.$$

さらに、

$$D_2 = 9801 - 1089 = 8712,$$

$$D_3 = 8712 - 2178 = 6534,$$

$$D_4 = 6534 - 4356 = 2178,$$

$$D_5 = 8712 - 2178 = 6534,$$

となる。ここで、 $D_3 = 6534$  と同じになったので循環する。

## 2. 考察

### 2.1. 10進数の場合.

#### (1) 2桁、3桁の整数

このときかならず回文になる。

証明は  $A = 10a + b, 100a + 10b + c$  として、差回文の操作をしていくとできます。

## (2) 4桁の整数

差回文の操作を行うと循環が生じた。しかし、どれも循環するパターンは全く同じで4桁の整数のとき差回文の操作の後、回文にはならないときは必ず2178 → 6534を繰り返す。

<証明>

同じように  $A = 1000a + 100b + 10c + d$  とおいて、 $a > d$ 、 $b - c \leq 0$  のとき、 $b - c \leq 1$  のときと見ていけば解けます。

結果、 $b - c = a - d$  のとき循環が生じています。ただし、以下の4つの場合は回文となる。

- $a - d = b - c = 5$  または  $d - a = c - b = 5$  のとき

$$D_1 = 9 \times 605 = 5445$$

- $a - d = 8$  かつ  $c - b = 3$  のとき、または  $d - a = 8$  かつ  $b - c = 3$  のとき

$$D_1 = 9 \times 858 = 7722, D_2 = 7722 - 2277 = 5445$$

(3) 5桁の整数

5桁の循環をする  $21978 \rightarrow 65934 \rightarrow 21978 \rightarrow \dots$  の2回の繰り返しと4桁の循環をする数が出てきた。

$A = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$  について、調べてみたが規則はなさそうに見えた。

FIGURE 1. 4桁の循環

9999に収束											
17028	65043										
	34056	30987	47916								
		11979		14058	70983	32076					
	42966	23958	61974				34947				
								39996			
				69003	38907				29997		
				46926	16038	67023				49995	
					48906	12078	74943				9999
						44946	19998	69993			
							42075	14949	79992		
									24948	59994	

FIGURE 2. 9999に収束

9009 に収束						
22968	63954	18018	63063	27027	45045	9009
31977	45936					
	13068	72963	36036			
		36927				
		18909	72072			
		13959	81972	54054		
		40986	27918			

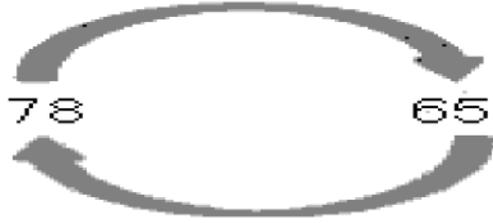
FIGURE 3. 9009 に収束

5445 に収束		
51975	5940	5445
57915		

FIGURE 4. 5445 に収束

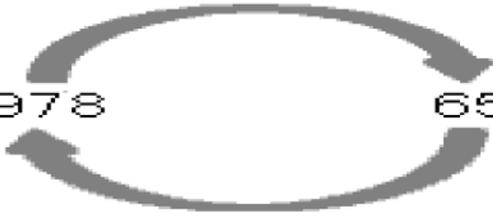
4桁

2178 6534



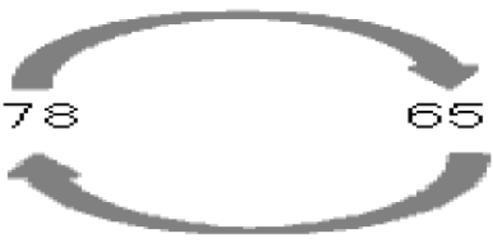
5桁

21978 65934



6桁

219978 659934



7桁

2199978 6599934

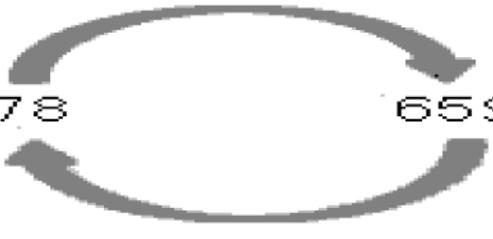


FIGURE 5. 循環

2.2.  **$G$ 進数について**.  $G$ 進数 ( $G = 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ) について考えてみると共通して、2つの循環が生じる特徴が分かった。

$2, 4$ 進数は差回文の循環は生じなかった。

TABLE 1.  $N$ 進数の循環

N進数	どのような循環か
3進数	1012 $\rightarrow$ 1012 $\rightarrow$ ...
	10 <b>2</b> 12 $\rightarrow$ 10 <b>2</b> 12 $\rightarrow$ ...
	10 <b>22</b> 12 $\rightarrow$ 10 <b>22</b> 12 $\rightarrow$ ...
5進数	13 $\rightarrow$ 13 $\rightarrow$ ...
	1 <b>4</b> 3 $\rightarrow$ 1 <b>4</b> 3 $\rightarrow$ ...
	1 <b>44</b> 3 $\rightarrow$ 1 <b>44</b> 3 $\rightarrow$ ...
	1034 $\rightarrow$ 3212 $\rightarrow$ 1034 $\rightarrow$ ...
	10 <b>4</b> 34 $\rightarrow$ 32 <b>4</b> 12 $\rightarrow$ 10 <b>4</b> 34 $\rightarrow$ ...

TABLE 2.  $N$ 進数の循環 2

N進数	どのような循環か
6進数	2134 $\rightarrow$ 2134 $\rightarrow$ ...
	21 <b>5</b> 34 $\rightarrow$ 21 <b>5</b> 34 $\rightarrow$ ...
7進数	1056 $\rightarrow$ 5412 $\rightarrow$ 3234 $\rightarrow$ 1056 $\rightarrow$ ...
	10 <b>6</b> 56 $\rightarrow$ 54 <b>6</b> 12 $\rightarrow$ 32 <b>6</b> 34 $\rightarrow$ 10 <b>6</b> 56 $\rightarrow$ ...
8進数	25 $\rightarrow$ 25 $\rightarrow$ ...
	2 <b>7</b> 5 $\rightarrow$ 2 <b>7</b> 5 $\rightarrow$ ...

TABLE 3.  $N$ 進数の循環3

N進数	どのような循環か
9進数	$3256 \rightarrow 3256 \rightarrow \dots$
	$32856 \rightarrow 32856 \rightarrow \dots$
	$17 \rightarrow 53 \rightarrow 17 \rightarrow \dots$
	$187 \rightarrow 583 \rightarrow 187 \rightarrow \dots$
	$1887 \rightarrow 5883 \rightarrow 1887 \rightarrow \dots$
	$1078 \rightarrow 7612 \rightarrow 5434 \rightarrow 1078 \rightarrow \dots$
	$10878 \rightarrow 76812 \rightarrow 54834 \rightarrow 10878 \rightarrow \dots$

- $G$ 進数の循環してる数の各桁の数の和は、 $G-1$ の倍数となっている。

これは10進数に変換したときも  $G-1$ の倍数であることを示す。

例) 9進数の循環する数3256について見ると、和は16で  $G-1=8$ の倍数となっている。

これを10進数に変換すると2400で8の倍数である。

- 8進数は除く。

ある数  $A$  の各桁の数を左の方から  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$  とおく。すべての  $\alpha \leq n-1$  について

$$|a_\alpha - a_{\alpha+1}| = s \quad (1 \leq s \leq G-1)$$

のとき、 $A$  の差回文の操作を繰り返すと循環する。

例) 9進数で  $A = 7535$  について見ると

$$B = 5357, D_1 = 21, D_2 = 5434, D_4 = 1078,$$

$$D_5 = 7612, D_6 = 5434$$

となり循環した。

ここで、循環の周期の数は表のようになっている。

TABLE 4. 繰り返す周期の数

$G$ 進数	3	5	6	7	9	10
繰り返す値の数	1	1 or 2	1	3	1 or 2 or 3	2