スーパー完全数の平行移動

飯高 茂

2018 年 8 月 24 日

1　完全数の m だけ平行移動

a の約数の和を $\sigma(a)$ で示す.

$\sigma(a)=2a$ のとき a を完全数という. $a=6,28,496,8128,$ はその例であり紀元前から知られていた.

原論の最後の成果は $q=2^{e+1}-1$ が素数なら $a=2^eq$ が完全数になるという結果である.

ここで パラメータ m を取り m だけ平行移動した狭義の完全数 α を次のように導入する. $q=2^{e+1}-1+m$ が素数になる e によって $\alpha=2^eq$ と書けるとき. m だけ平行移動した狭義の完全数という.

$a=2^e$ および $N=2^{e+1}-1$ とおくと,$N=\sigma(a), q=N+m=\sigma(a)+m, q+1=2a+m$ を満たす.

$Nq=(2a-1)q=2\alpha-q, N-q=-m$ に注意して

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)&=\sigma(2^e)\sigma(q)\\&=Nq+N\\&=2\alpha-q+N\\&=2\alpha-m.\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha)=2\alpha-m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす.

この解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

$m=0$ の場合は α:偶数なら $\alpha=2^eq,(q=2^{e+1}-1)$ が素数, と書けることはオイラーが示した.

与えられた m に対し平行移動 m の (広義) 完全数を決定することはどの m についてもできていない.

2　スーパー完全数の m だけ平行移動

2.1　スーパー完全数の場合

$q=2^{e+1}-1+m$ が素数になるとき q :素数 により $\sigma(q)=q+1$.

この左辺は $\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m)$. 右辺は $q+1=2a+m$.

ここであえて, $A=\sigma(a)+m$ とおく. 定義から, $q=A$ なのでこれは素数.

$\sigma(A)=q+1$, $q+1=2a+m$ により次の式を得る.　$\sigma(A)=2a+m.$

そこで

$A=\sigma(a)+m,\sigma(A)=2a+m$

を a と A を 2 つの未知数とみてこれを連立方程式と理解しこの式を平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言う.

この解 a を平行移動 m のスーパー完全数という. また A を a のパートナーという.

$m=0$ のとき $\sigma^2(a) = \quad \sigma(\sigma(a))$ とおくと平行移動 m のスーパー完全数の方程式は $\sigma^2(a)=2a$ となるので, 完全数の方程式 $\sigma(a)=2a$ と類似した形になりこの解をスーパー完全数と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana により 1969 年に導入された. また偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a=2^e$ となることも Suryanaryana により示された. これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.

表 1: $\sigma^2(a)=2a$ のときの解 (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

ここで $q=N(a)$ は本当の メルセンヌ素数

命題 1 $a=2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q=2^{e+1}-1+m$ は素数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる. $q>2$ なら q は奇数で, m は偶数.

したがって, m が奇数なら平行移動 m のスーパー完全数はあったとしても 2 べきにならない.

Proof.

式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に $a=2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1}-1+m)=2^{e+1}+m.$$

$q=2^{e+1}-1+m$ とおくとき, $\sigma(q)=q+1$. よって, q は 素数.

End

ここで, $a=2^e$ なので, $q=2a-1+m$. 2 べきの解を正規解 (regular solutions) という.

命題 2 $a=2^e$ で $q=2^{e+1}-1+m$ が素数なら a はスーパー完全数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.

Proof.

q は素数なので $\sigma(q)=q+1$.

$q=2^{e+1}-1+m=\sigma(a)+m, q+1=2^{e+1}+m=2a+m.$

よって, $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$

End

定義 1 平行移動 m のスーパー完全数 a に対して $q=2a-1+m$ を擬メルセンヌ数という.

注意 1 実例にあたると,$|m|<10$ 位なら a が偶数の仮定だけでも $a=2^e$ が導ける可能性がある. *(反例は $m=-28$ のときにある)*

2.2 $m=-18$

この場合,2 べきの解以外は $a=3^3=27$ と $a=3p(p\neq 3, p:$ 素数$)$ となるらしい. さらに $q=2p-7$ は素数と推測する.

$a=3p$ に対してそのパートナ A は $A=\sigma(3p)-18=4p-14=2q, q=2p-7.$

正規解である 2 のべき以外は $3p$ と書けるほかに,$3^3=27$ がある. これは擬素数解とみることができよう.

注意 2 -18　だけ平行移動したスーパー完全数は *2* のべき以外は $3p$ と書けることが証明できればうれしい.

表 2: $m = -18$

a	素因数分解	$p = a/3$	$q = 2p - 7$
15	$3 * 5$	5	3
16	2^4		
21	$3 * 7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3 * 13$	13	19
57	$3 * 19$	19	31
64	2^6		
111	$3 * 37$	37	67
129	$3 * 43$	43	79
201	$3 * 67$	67	127
219	$3 * 73$	73	139
237	$3 * 79$	79	151
309	$3 * 103$	103	199
327	$3 * 109$	109	211
417	$3 * 139$	139	271
471	$3 * 157$	157	307
579	$3 * 193$	193	379
669	$3 * 223$	223	439
831	$3 * 277$	277	547
921	$3 * 307$	307	607
939	$3 * 313$	313	619
1024	2^{10}		

命題 3 $m = -18$ に対し,$a = 3p(p \neq 3, p:$ 素数) かつ $q = 2p - 7$ が素数なら $a = 3p$ は解.

Proof

$m = -18$ を定義連立式 に代入すると $A = \sigma(a) - 18, \sigma(A) = 2a - 18$.

$a = 3p, (p \neq 3)$ とおくと $A = \sigma(a) - 18 = 4(p+1) - 28 = 4p - 14 = 2(2p - 7)$. ここで, $q = 2p - 7$ は素数と仮定する. $A = 2q$. $\sigma(A) = \sigma(2q) = 3q + 3$.

一方, $2a + m = 6p - 18 = 3(2p - 6) = 3(q + 7) - 18 = 3q + 3$. よって, $\sigma(A) = 2a - 18$.

End

この逆が次の形で成立.

命題 4 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$, $m = -18$ のとき

$a = 3L, (L \neq 0 \bmod 3)$ と書ける解があるなら, $p = L, q = 2p - 7$ はともに素数.

Proof.

$a = 3L$ に対して, $A = \sigma(3L) - 18 = 4\sigma(L) - 18 = 2(2\sigma(L) - 9)$ となるので

$Q=2\sigma(L)-9$ とおくとき Q は奇数で $A=2Q,\sigma(A)=2a-18=6(L-3)$.

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\sigma(2Q)\\&=3\sigma(Q)\geq 3Q+3\\&=6\sigma(L)-27+3\\&=6\sigma(L)-24\\&\geq 6L+6-24=6(L-3)\end{aligned}$$

$3\sigma(Q)=3Q+3$,$\sigma(A)=6(L-3)$ はすでに示されているのですべて等号成立.
$3\sigma(Q)\geq 3Q+3$, $6\sigma(L)-24=6L+6-24$ ゆえに

$$\sigma(Q)=Q+1,\sigma(L)=L+1.$$

よって, $L=p,q=2p-7$ はともに素数.
End
$p,q=2p-7$ はともに素数なのでこれはスーパー双子素数.

3 スーパー双子素数

平成 30 年 3 月 8 日 (木) に行われた『完全数の新しい世界』の出版記念会で提出した問題は次の 2 つであった.

与えられた 整数 $(a>0,b)$ に対して, $p=aq+b$ とおくとき p,q がともに素数なら (p,q) を a,b に関しての 超 (スーパー) 双子素数という.

1. 超双子素数が無限にある a,b はどんな条件を満たすか
2. 超双子素数が有限個の a,b は存在するか
3. 与えられた $(a>0,b)$ に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a)$,$\varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

3.1 ウルトラ３つ子素数

与えられた 整数 $(a>0,b)$ に対して, 整数 $(a>0,b,c>0,d)$ に対して $p=aq+b, r=cq+d$ とおくとき p,q,r がともに素数なら (p,q,r) を a,b,c,d に関してのウルトラ 3 つ子素数という.

- ウルトラ 3 つ子素数が無限にある a,b,c,d はどんな条件を満たすか
- ウルトラ 3 つ子素数が有限個の a,b,c,d は存在するか
- 与えられた (a,b,c,d) に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a)$,$\varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

高橋洋翔は数日後次の解答を寄せた.

1) 1.1 (i)$a+b\equiv 1 \mod 2$, (ii)a,b は互いに素

2.1 (i) $a+b\equiv 1 \mod 2$, (ii) a,b は互いに素,(iii)$c+d\equiv 1 \mod 2$, $(iv)c,d$ は互いに素.

ただし $b\not\equiv 0 \mod 3$: (水谷一による修正)

水谷一さんはウルトラ三つ子素数の除外条件をより精密にすることを提案した

注意 3 (水谷一, 除外条件の精密化) *$ac\equiv -bd\not\equiv 0 \bmod 3$ を満たすときウルトラ三つ子素数は有限個 (ただ 1 つ).*

以前から双子素数の問題 (無限にあるという予想) に関心のあった高橋はこれらの条件を満たすときスーパー双子素数やウルトラ三つ子素数は無限にあるのではないか, という予想を述べた. 2018 年にお台場の TFT ホールで開かれた日本数学教育学会 100 周年記念企画として開かれた研究発表会でポスター発表として一般向けに発表された.

4 $m=-28$ の スーパー完全数

表 3: $m=-28$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$	a/7
16	2^4	3	3	2.285714286
26	$2*13$	23	23	3.714285714
35	$5*7$	41	41	5
77	$7*11$	125	5^3	11
98	$2*7^2$	167	167	14
107	107	185	$5*37$	15.28571429
119	$7*17$	209	$11*19$	17
128	2^7	227	227	18.28571429
161	$7*23$	293	293	23
203	$7*29$	377	$13*29$	29
329	$7*47$	629	$17*37$	47
371	$7*53$	713	$23*31$	53
413	$7*59$	797	797	59
497	$7*71$	965	$5*193$	71
623	$7*89$	1217	1217	89
707	$7*101$	1385	$5*277$	101
917	$7*131$	1805	$5*19^2$	131
959	$7*137$	1889	1889	137
1043	$7*149$	2057	11^2*17	149
1253	$7*179$	2477	2477	179
1379	$7*197$	2729	2729	197
1589	$7*227$	3149	$47*67$	227
1631	$7*233$	3233	$53*61$	233
1799	$7*257$	3569	$43*83$	257
6491	6491	12953	12953	927.2857143
29339	29339	58649	$223*263$	4191.285714

$m=-28$ を定義連立式 に代入すると $A=\sigma(a)-28, \sigma(A)=2a-28$.

$a=7p, (p\neq 7)$ とおくと $A=\sigma(a)-28=8(p+1)-28=4p-20=4(2p-5)$. ここで, $q=2p-5$ は素数と仮定する. $A=4q$. $4, q$ は互いに素なので $\sigma(A)=\sigma(4q)=7q+7$.

一方, $2a+m=14p-28=7*2p-28=7(q+5)-28=7q+7=\sigma(A)$.

End

この逆が次の形で成立.

命題 5 $A=\sigma(a)-28, \sigma(A)=2a-28$

$a=7Q, (Q\neq 0 \bmod 7)$ と書ける解があるなら, $p=Q, q=2p-5$ はともに素数.

Proof.

$\sigma(a) = \sigma(7Q) = 8\sigma(Q)$ なので, $A = \sigma(a) - 28 = 8\sigma(Q) - 28 = 4(2\sigma(Q) - 7)$. $R = 2\sigma(Q) - 7$ とおくとこれは奇数で, $A = 4R$.

$\sigma(A) = \sigma(4R) = 7\sigma(R)$.

一方,$\sigma(A) = 2a - 28 = 14Q - 28$ により

$$7\sigma(R) = 14Q - 28.$$

よって $\sigma(R) = 2Q - 4 \geq R + 1$.

ゆえに, $2Q \geq R + 5$.

$R = 2\sigma(Q) - 7$ を代入して

$$2Q \geq R + 5 = 2\sigma(Q) - 2.$$

よって, $Q \geq \sigma(Q) - 1$. したがって, $Q = \sigma(Q) - 1$ が成り立ち, Q は素数. これより, $\sigma(R) = R + 1$ も成立し, R は素数.

$p = Q, q = R$ と書くと, $a = 7p, q = 2\sigma(Q) - 7 = 2p - 5$. $(p, q = 2p - 5)$ はスーパー双子素数.

End

解を分類すると,

i. 2^e (正規解)

ii. $7p($ p: 素数) (通常解)

iii. 素数解 107 など

iv. $2 * 13, 2 * 7^2$ 偶数解

4.1 素数解

一般に スーパー完全数 $A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a$ について $a = p$: 素数 p の解があるとする.

$A = \sigma(a) + m = p + 1 + m$ なので, $p = A - m - 1$.

$$\sigma(A) = m + 2a = m + 2(A - m - 1) = 2A - m - 2.$$

$m = -28$ のとき $\sigma(A) = 2A + 26$.

そこで 平行移動 -26 の解 A について, $A - m - 1 = A + 27$ が素数 p なら これが解.

$A + 27$ が素数になるのは 107,6491,29939. これらは平行移動 $m = -28$ のスーパー完全数の素数解. したがって, 107 以外の素数解　6491,29939 がみつかった.

表 4: 平行移動 $m=-26$ の完全数

A	factor	$A+27$	factor
80	$2^4 * 5$	107	107
1184	$2^5 * 37$	1211	$7 * 173$
6464	$2^6 * 101$	6491	6491
29312	$2^7 * 229$	29339	29339
78975	$3^5 * 5^2 * 13$	79002	$2 * 3^3 * 7 * 11 * 19$
510464	$2^9 * 997$	510491	$41 * 12451$
557192	$2^3 * 17^2 * 241$	557219	$13 * 42863$

5 $a = \varpi p$

以上の議論をもとに一般化する.

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす解 a に素数 p の ϖ 倍解 ϖp が数多くあるとする. $a=\varpi p$ になる.

ここでの結果は, $m=-28$, と $m=-18$ のときのみ起こるらしい.

$\sigma(a)=\sigma(\varpi p)=\sigma(\varpi)(p+1)$ なので $A=\sigma(a)+m=\sigma(\varpi)(p+1)+m$.

ゆえに, $p+1=\dfrac{A-m}{\sigma(\varpi)}$. 整理して

$$p=\frac{A-m-\sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}.$$

$\sigma(A)=2a+m=2\varpi p+m$ によって,

$$\sigma(A)=2\varpi(\frac{A-m-\sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)})+m$$

を整理して

$$\sigma(\varpi)\sigma(A)=2\varpi(A-m-\sigma(\varpi))+m\sigma(\varpi).$$

$Z=-2\varpi(m+\sigma(\varpi))+m\sigma(\varpi)$ とおくと,

$$\sigma(\varpi)\sigma(A)=2\varpi A+Z.$$

さてこれに B 型解 $A=kQ(Q$:素数$)$ があるとする. ここで k は Q の倍数でない定数.

$\sigma(A)=\sigma(k)(Q+1)$ により

$$\sigma(A)=\frac{\sigma(k)}{k}A+\sigma(k)$$

および

$$\sigma(A)=\frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}A+\frac{Z}{\sigma(\varpi)}$$

によって, A の係数を等値して

$$\frac{\sigma(k)}{k}=\frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$$

定数項の部分を参照して

$$\sigma(k)=\frac{Z}{\sigma(\varpi)}.$$

よって, $Z=\sigma(k)\sigma(\varpi)$.

$Z=-2\varpi(m+\sigma(\varpi))+m\sigma(\varpi)$ によって,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi)=-2\varpi(m+\sigma(\varpi))+m\varpi=m(-2\varpi+\sigma(\varpi))-2\varpi\sigma(\varpi).$$

5.1 $\dfrac{\sigma(k)}{k} = \dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ の解

$\dfrac{\sigma(k)}{k} = \dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ を書き直すと,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi$$

ϖ を素数とすると, $\sigma(k)(\varpi+1) = 2k\varpi$ を満たすような　k, ϖ をとりあえず計算機で探索した.

表 5: ϖ は素数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
4	7	7
16	31	31

これより, $k = 2^e, \sigma(k) = 2^{e+1} - 1 = 2k - 1$:メルセンヌ素数 $\varpi > 2$ なら $\varpi = \sigma(k)$.
$\varpi = \sigma(k) = 2k - 1, \sigma(\varpi) = 2k$, $\sigma(k)(\varpi + 1) = (2k-1) * 2k$.
$\sigma(k)\sigma(\varpi) = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi)$ を計算すると,
結局

$$(2k-1)k = (1-k)m - 2k(2k-1).$$

$k = 2$ なら, $6 = -m - 12$. よって, $m = -18$.
$k = 4$ なら, $7 * 4 = -3m - 8 * 7$. $m = -28$.
$m = \dfrac{3k(2k-1)}{k-1} = 6k - 3 + \dfrac{3}{k-1}$. よって, $k - 1 = 1, 3$. これより $k = 2, 4$.

事実 1 $\sigma(k)(\varpi+1) = 2k\varpi$ を満たす　k, ϖ を求めることは多分難しい.

$\varpi = 2$ なら $3\sigma(k) = 4k$. $k = 4$ が唯一の解.

表 6: ϖ 自然数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
7	8	4
4	7	7
31	32	16
16	31	31
127	128	64
64	127	127

ϖ が素数でないなら, $\varpi = 2^e, \sigma(k) = 2^{e+1}, k = 2^{e+1} - 1$. k はメルセンヌ素数になるのが計算結果. 同様の計算によって

$$k(k+1) = m(1-k) - k(k+1).$$

$-m = \dfrac{2k(k+1)}{k-1} = 2k + 4 + \dfrac{4}{k-1}$.

ゆえに, $k-1 = 1, 2, 4$. $k = 2, 3, 5$. $k = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数なので, $e = 1, k = 3$. $\varpi = 2$ は素数なので仮定に矛盾.

注意 4 (水谷一による) $\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi$ の解については次の推論ができる.

k, ϖ を互いに素として $\beta = k\varpi$ とおくと, $\sigma(\beta) = \sigma(k)\sigma(\varpi)$ について $\sigma(\beta) = 2\beta$ なので, β を偶数とすれば オイラーの定理で, $\beta = 2^{\varepsilon}q, q$: 素数. したがって, k, ϖ は $2^{\varepsilon}, q$ と集合として一致する.

6 平行移動 m の スーパー完全数

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす.
平行移動 m の スーパー完全数 a に対し $A=\sigma(a)+m$ をそのパートナと言う.
定義式
$A=\sigma(a)+m, \sigma(A)=2a+m$
を平行移動 m の スーパー完全数 を定義する連立方程式と見る.
$qM=2a-1+m$ を疑似メルセンヌ数 (quasi Mersenne number) という.

6.1 素数解

解 a に素数解 p があるとする.

$A=\sigma(p)+m=p+1+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(p+1+m)=2p+m$. $p=A-1-m$ を代入し,

$$\sigma(A)=2p+m=2A-2-m.$$

これは平行移動 $2+m$ の完全数の方程式とみる. さて一般に μ を完全数とするとき $\sigma(\alpha)=2\alpha+2\mu$ の解はよく分かっている.

i. 通常解 (B 型解)　ii. 擬素数解, iii. A 型解, iv. D 型解 v. 未知の解

そこで $-2-m=2\mu$ とおくとき, $m=-2\mu-2$ になり, $\sigma(A)=2A-2-m=2A+2\mu$ の解がそれぞれ 5 つの型に応じてい解.

ただし,$A-1-m$ は素数であることが必要不可欠である.

i. 通常解 (B 型解).

$A=\mu Q(Q:\mu$ と互いに素な素数). になるが $p=\mu Q+2\mu+1$:素数が必要で, Q は μ と互いに素な素数. ここで, $Q, p=\mu Q+2\mu+1$ はスーパー双子素数になっている.

ii. 擬素数解,

$\mu=2^{\varepsilon}q, (q=2^{\varepsilon+1}, q:$ 素数) のとき, $A_1=\mu q^2$, $A_2=\mu 2^{\varepsilon+1}$ が 2 つの擬素数解.
$b_1=1+2*\mu+A_1, b_2=1+2*\mu+A_1$ が素数ならこれらはスーパー完全数である.
不思議なことにこれらは $\mu=6, 28, 496, 8128$ のとき解になる.

7 解 $3p$ の場合

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす解 a に素数の 3 倍解 $3p$ があるとする.

$A=\sigma(3p)+m=4p+4+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(4p+4+m)=2a+m=6p+m$. $4p=A-4-m$ を代入するためにまず 2 倍する.

$$2\sigma(A)=12p+2m=3(A-4-m)+2m=3A-12-m.$$

ところで, 一般に $2\sigma(a)=3a+6$ の解は $a=8,2p(p>2:$ 素数$)$ なので, $-12-m=6$ とおくとき , $m=-18$.

このとき通常解 i. $A=2Q(Q>2$:素数). ii. 擬素数解 $A=8$.

i. $A=2Q$ のとき, $A=4p-14=2Q$. これより, $Q=2p-7$. $p,Q=2p-7$ はスーパー双子素数.

ii. $A=8$ のとき, $A=4p-14=8$. これより, 解は無い.

8 $m=-(2\mu+2)$ の スーパー完全数の解

$A=\sigma(a)+m,\sigma(A)-m=2a$ について $m=-(2\mu+2)$,(μ: 完全数) a に 素数の解 p があるとする.

$A=\sigma(a)+m=p-2\mu-1$ なので, $p=A+2\mu+1$.

$$\sigma(A)=m+2a=-2\mu-2+2p.$$

一方, $p=A+2\mu+1$ により $-2\mu-2+2p=-2\mu-2+2(A+2\mu+1)=2A+2\mu$. ゆえに

$$\sigma(A)=2A+2\mu.$$

μ : 完全数なのでこの解には

i. 通常解 (B 型)　　$A=\mu Q$, ここで Q は μ と互いに素な任意の素数.

$A=p-2\mu-1$ により, $\mu Q=p-2\mu-1$. よって, $p=2\mu+1+\mu Q$. (p,Q) はスーパー双子素数.

ii. 擬素数 $\mu=2^{\varepsilon}q$ とおくとき,　　$A_1=\mu q^2$ または $A_2=\mu 2^{\varepsilon+1}$.

iii. エイリアン　A 型解 $A=2^{e}\varpi,(\varpi=2^{e+1}-1-2\mu$:素数.

$p=A+2\mu+1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解 $A=\sigma(a)+m,\sigma(A)-m=2a$ $p=a$ からでる.

iv. エイリアン　D 型解 $A=2^{f}\pi_1\pi_2$. $p=A+2\mu+1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解

これについては数表を参照

表 7: μ, コンピュータによる調査, $b=A+2\mu+1$,$\mu=6,28,496,8128$, 擬素数解

μ	$1+2\mu$	c_1	c_2	$A_1=c_1\mu$	$A_2=c_2\mu$	b_1	b_2
6	13	4	9	24	54	37	67
28	57	8	49	224	1372	281	1429
496	993	32	961	15872	476656	16865	477649
8128	16257	128	16129	1040384	131096512	1056641	131112769

$A_1=c_1\mu$,$A_2=c_2\mu$ が擬素数解, $b_1=1+2\mu+A_1$, $b_2=1+2\mu+A_2$ が素数なら A_1,A_2 は解.

この表で
477649=17*28097,16865=5*3373, 非素数
37,67,281,1429,1056641,131112679:素数

表 8: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6$

e	A(A 型解)	素因数分解	b	素因数分解
3	24	$2^3 * 3$	37	*prime*
4	304	$2^4 * 19$	317	*prime*
8	127744	$2^8 * 499$	127757	$7 * 18251$
12	33501184	$2^{12} * 8179$	33501197	$577 * 58061$
16	8589082624	$2^{16} * 131059$	8589082637	$1031 * 8330827$

表 9: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 28$

e	A(A 型解)	素因数分解	b	素因数分解
5	224	$2^5 * 7$	281	*prime*
6	4544	$2^6 * 71$	4601	$43 * 107$
7	25472	$2^7 * 199$	25529	$7^2 * 521$
9	495104	$2^9 * 967$	495161	prime
15	2145615872	$2^{15} * 65479$	2145615929	$3463 * 619583$
18	137424011264	$2^{18} * 524231$	137424011321	$7019 * 19578859$
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$	8795973484601	$2612257 * 3367193$

表 10: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 496$

e	A(A 型解)	素因数分解	b	素因数分解
9	15872	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
13	126083072	$2^{13} * 15391$	126084065	$5 * 311 * 81083$
16	8524857344	$2^{16} * 130079$	8524858337	prime
25	2251766494134272	$2^{25} * 67107871$	2251766494135265	$5 * 4567 * 98610312859$
28	144114921519448064	$2^{28} * 536869919$	144114921519449057	$811 * 18917 * 939368151$

表 11: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 8128$

e	A(A 型解)	素因数分解	b	素因数分解
13	1040384	$2^{13} * 127$	1056641	prime
15	1614774272	$2^{15} * 49279$	1614790529	$11 * 59 * 2488121$
19	541232463872	$2^{19} * 1032319$	541232480129	$11 * 49202952739$
21	8761999622144	$2^{21} * 4178047$	8761999638401	$167 * 193 * 271850071$

D 型解の例

表 12: $\sigma(a) - 2a = 56$ の解

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$

解 a に対して $b = 1 + 2\mu + a$ の値と素因数分解を表示
驚いたことに b が素数の例がない.

表 13: $\sigma(a) - 2a = 56$ の解

a
$a = 14552 = 2^3 * 17 * 107$
$b = 14609 = [7, 2087]$
$a = 2^3 * 19 * 61$
$b = 9329 = [19, 491]$
$a = 74992 = 2^4 * 43 * 109$
$b = 75049 = [13, 23, 251]$
$a = 35019968 = 2^6 * 131 * 4177$
$b = 35020025 = [5, 5, 1400801]$
$a = 15317696 = 2^6 * 137 * 1747$
$a = 6019264 = 2^6 * 163 * 577$
$b = 6019321 = [7, 11, 78173]$
$a = 53032832 = 2^7 * 317 * 1307$
$b = 53032889 = [7, 13, 43, 13553]$
$a = 3365232128 = 2^9 * 1277 * 5147$
$b = 3365232185 = [5, 7, 673, 142867]$
$a = 26882784256 = 2^{10} * 2557 * 10267$
$b = 26882784313 = [7, 11, 17839, 19571]$
$a = 17374747648a = 2^{10} * 3691 * 4597$
$b = 17374747705 = [5, 7, 101, 149, 32987]$

9 $m = -994$ の スーパー完全数

2 べきの解なら A 型 完全数が対応する.
解を分類すると,
i. 2^e 正規解
ii. p(p: 素数) 解
iii. 非素数

表 14: $m = -994$ スーパー完全数

a(素数)		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
6449	6449	11903	11903	5456	11
12401	12401	23807	$7 * 19 * 179$	11408	23
15377	15377	29759	29759	14384	29
27281	27281	53567	$17 * 23 * 137$	26288	53
31249	31249	61503	$3 * 13 * 19 * 83$	30256	61
36209	36209	71423	$11 * 43 * 151$	35216	71
37201	37201	73407	$3 * 24469$	36208	73
40177	40177	79359	$3 * 7 * 3779$	39184	79
45137	45137	89279	$73 * 1223$	44144	89
52081	52081	103167	$3^3 * 3821$	51088	103
55057	55057	109119	$3 * 36373$	54064	109
57041	57041	113087	$13 * 8699$	56048	113
74897	74897	148799	$7 * 29 * 733$	73904	149
a 非素数		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
2097152	2^{21}	4193309	4193309	2096159	4226.127016
512	2^9	29	29	-481	-0.969758065
2093	$7 * 13 * 23$	3191	3191	1100	2.217741935
7385	$5 * 7 * 211$	13775	$5^2 * 19 * 29$	6392	12.88709677
13349	$7 * 1907$	25703	25703	12356	24.91129032
31913	$7 * 47 * 97$	62831	$83 * 757$	30920	62.33870968
167297	$13 * 17 * 757$	333599	$7 * 47657$	166304	335.2903226
563297	$7 * 80471$	1125599	1125599	562304	1133.677419
1356977	$23 * 41 * 1439$	2712959	$307 * 8837$	1355984	2733.83871
1486265	$5 * 11 * 61 * 443$	2971535	$5 * 7 * 59 * 1439$	1485272	2994.5

表 15: $m = -994$, A 型 完全数

a	factor
14848	$2^9 * 29$
8794006355968	$2^{21} * 4193309$

第 5 列で素数になる場合 (* 印), スーパー完全数の素数解

A,D 型の解にマーク

表 16: $m = -992$ 完全数

a		$b = 1 + 2 * \mu + a$	
1488	$2^4 * 3 * 31$	2481	$3 * 827$
2480	$2^4 * 5 * 31$	3473	$23 * 151$
2892 D	$2^2 * 3 * 241$	3885	$3 * 5 * 7 * 37$
3472	$2^4 * 7 * 31$	4465	$5 * 19 * 47$
5456	$2^4 * 11 * 31$	6449	$*6449$
6104 D	$2^3 * 7 * 109$	7097	$47 * 151$
6448	$2^4 * 13 * 31$	7441	$7 * 1063$
8432	$2^4 * 17 * 31$	9425	$5^2 * 13 * 29$
9424	$2^4 * 19 * 31$	10417	$11 * 947$
11408	$2^4 * 23 * 31$	12401	$*12401$
14384	$2^4 * 29 * 31$	15377	$*15377$
15872 A	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
18352	$2^4 * 31 * 37$	19345	$5 * 53 * 73$
20336	$2^4 * 31 * 41$	21329	$7 * 11 * 277$
21328	$2^4 * 31 * 43$	22321	$13 * 17 * 101$
23312	$2^4 * 31 * 47$	24305	$5 * 4861$
26288	$2^4 * 31 * 53$	27281	$*27281$
29264	$2^4 * 31 * 59$	30257	$79 * 383$
30256	$2^4 * 31 * 61$	31249	$*31249$
33232	$2^4 * 31 * 67$	34225	$5^2 * 37^2$
35216	$2^4 * 31 * 71$	36209	$*36209$
36208	$2^4 * 31 * 73$	37201	$*37201$
39184	$2^4 * 31 * 79$	40177	$*40177$
41168	$2^4 * 31 * 83$	42161	$7 * 19 * 317$

10 m だけ平行移動したウルトラ完全数

$\sigma(2a) = 4a - 1, \sigma(\sigma(a) + m) - m = 2a$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$$

を得る. これを a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

定義 2 $\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$ となる式を, a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

この式は複雑なので変数を増やして連立方程式に直す.

表 17: $m = -992$ 完全数

a		$b = 1 + 2 * \mu + a$	
44144	$2^4 * 31 * 89$	45137	$*45137$
48112	$2^4 * 31 * 97$	49105	$5 * 7 * 23 * 61$
50096	$2^4 * 31 * 101$	51089	$47 * 1087$
51088	$2^4 * 31 * 103$	52081	$*52081$
53072	$2^4 * 31 * 107$	54065	$5 * 11 * 983$
54064	$2^4 * 31 * 109$	55057	$*55057$
56048	$2^4 * 31 * 113$	57041	$*57041$
62992	$2^4 * 31 * 127$	63985	$5 * 67 * 191$
64976	$2^4 * 31 * 131$	65969	$41 * 1609$
67952	$2^4 * 31 * 137$	68945	$5 * 13789$
68944	$2^4 * 31 * 139$	69937	$7 * 97 * 103$
73904	$2^4 * 31 * 149$	74897	$*74897$

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1.$$

$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - m$, $\sigma(B) = 4a - 1$

この形の解 a を平行移動 m のウルトラ完全数という. $m = 0$ なら $\sigma^3(a) = 4a - 1$ になりこれが高橋のウルトラ完全数の定義式である.

11 ウルトラ完全数 II 型

$a = 2^e, (q = 2a - 1 + m :$ 素数$)$ のとき, $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $\sigma(a) = N = 2a - 1 = q - m$ なので $q = \sigma(a) + m$.

$A = \sigma(a) + m$ とおく. ($A = q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(A) = q + 1 = A + 1$ なので, $B = \sigma(A) - 1$ とおく. ($B = q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(B) = q + 1 = 2a + m$.

そこで, $a = 2^e, (q = 2a - 1 + m :$ 素数$)$ の仮定の下で得られた連立式

$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a + m$

($a = 2^e$ の仮定をすっかり忘れ) を満たす a を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型という.

A をパートナー, B をシャドウという.$qM = 2a - 1 + m$ を疑似メルセンヌ数という.

区別のために前の式で定められたウルトラ完全数を I 型という. また高橋のウルトラ完全数とも言う.

ウルトラ完全数 II 型をウルトラ完全数ニュータイプともいう.

このようにして得られたウルトラ完全数 II 型はまったくのご都合主義で得られたもののようであるが研究を積み重ねてみると不思議なほど有用で研究しやすい式である.

実際ウルトラ完全数 II 型において $m = -28, -18, -14, -58$ のときの解からウルトラ三子素数が出てくる.

12　ウルトラ完全数 II 型の基本定理

次の結果はウルトラ完全数 II 型での完全数についてのオイラーによる定理の類似である.

定理 1 $m = 0$ のときウルトラ完全数 *II* 型 である a は偶数を仮定すると, $a = 2^e$, かつ $q = 2a - 1$ は素数になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

Proof.

条件から, $A = \sigma(a)$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a$ を満たす.

a は偶数なので奇数 L により $a = 2^e L, (e > 0)$, と書ける.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき, $A = \sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = N\sigma(L)$. とくに $A = N\sigma(L)$ なので N と $\sigma(L)$ は A の約数である.

$L > 1$ を仮定する. すると, $\sigma(L) \geq L + 1$.

$A, \sigma(L)$ は A の約数なので

$$\sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A.$$

条件式 $\sigma(B) = 2a = 2 * 2^e L = (N+1)L$, かつ $\sigma(B) \geq B + 1 = \sigma(A)$.

よって,

$$\sigma(B) = (N+1)L \geq B + 1 = \sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A \geq 2 + L + N(L+1).$$

これより

$$(N+1)L \geq 2 + L + N(L+1).$$

これは矛盾. よって, $L = 1, a = 2^e$. ここで次の補題を利用する.

補題 1 ウルトラ完全数 *II* 型の解 a が *2* べき, すなわち $a = 2^e$ なら, $A = q = 2a - 1 + m$ は素数

Proof.

仮定より $A = \sigma(a) + m = 2a - 1 + m$. 定義から $\sigma(B) = 2a + m = A + 1$.

$\sigma(B) = 2a + m \geq B + 1 = \sigma(A) \geq A + 1 = 2a + m$.

よって 2 つの等号が成り立ち, $\sigma(B) = B + 1, \sigma(A) = A + 1$. よって, B は素数. A も素数. $A = 2a - 1 + m = q$ なので, $q = 2a - 1 + m$ は素数.

End

この補題により, $q = 2a - 1 = 2^{e+1} - 1$ は素数 (メルセンヌ素数), になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

表 18: $m = -18$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$factor$	$p = a/3$	$q = 2p - 7$	$r = 6p - 19$	$r + 1$	$2a + m$
15	$3 * 5$	5	3	11	12	15
16	2^4	5.333333333	3.666666667	13	14	16
21	$3 * 7$	7	7	23	24	21
29	29	9.666666667	12.33333333	39	40	29
39	$3 * 13$	13	19	59	60	39
64	2^6	21.33333333	35.66666667	109	110	64
129	$3 * 43$	43	79	239	240	129
201	$3 * 67$	67	127	383	384	201
219	$3 * 73$	73	139	419	420	219
309	$3 * 103$	103	199	599	600	309
669	$3 * 223$	223	439	1319	1320	669
729	3^6	243	479	1439	1440	729

定理 2 $m=-18$ のとき, $p,q=2p-7,r=6p-19$ がすべて素数なら $a=3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.

Proof
$m=-18,a=3p$ を代入すると,
$A=\sigma(a)+m=4p+4-18=4p-14=2q,q=2p-7$. q: 素数と仮定すると,
$r=B=\sigma(A)-1=3q+2=3(2p-7)+2=6p-19$. r: 素数と仮定すると,
$\sigma(B)=6p-18=2a+m$

End

さらにこの逆が成り立つ.

命題 6 p : 素数, $a=3p$, $A=\sigma(a)+m=2q,q=2p-7$
として $B=\sigma(A)-1,\sigma(B)=6p-18=2a+m$ を仮定すると, q,r はともに素数.

Proof.

$$\sigma(B)=6p-18\geq B+1=\sigma(A)\geq A+1.$$

$A=\sigma(a)+m=2q$ により, $\sigma(A)=\sigma(2q)=3\sigma(q)\geq 3q+3=3(2p-6)$.
$\sigma(B)=6p-18$ により, $\sigma(B)=6p-18\geq B+1=\sigma(A)\geq 3(2p-6)$.
$\sigma(B)=3(2p-6)$ によりすべて等号が成り立ち, 結果として. q,r はともに素数.

End

ウルトラ三つ子素数とニュータイプのウルトラ完全数の関係がこのように成立した.
この結果は大きな勝利とも言える.

ニュータイプのウルトラ完全数の発見の端緒は 2018 年 7 月 2 日新宿にある大学病院の地下の放射線治療室前の廊下におかれたベンチで得られ, その後西国分寺にある都立多摩図書館でまとまった結果が得られた.

このように研究を行った動機は, 高橋のスーパー双子素数, ウルトラ三つ子素数予想を補強することであった.

$m=-18$ のとき, $a=3p$ の仮定を緩めることを試みよう.
解 $a=3\rho$ ($3,\rho$: 互いに素) を持つとする.
$A=\sigma(a)+m=4p+4-18=4\sigma(\rho)-18=2R$ ただし $R=2\sigma(\rho)-9$.
すると, R は奇数なので $\sigma(A)=3\sigma(R)$.
$B=\sigma(A)-1=3\sigma(R)-1$.

$$\sigma(B)=2a+m=6\rho-18\geq B+1=\sigma(A)=3\sigma(R).$$

$$\sigma(B)=3\sigma(R)\geq B+1\geq\sigma(A)=3\sigma(R).$$

不等号の箇所はすべて号成立になりその結果,

$$\sigma(B)=B+1,\sigma(R)=R+1,\sigma(\rho)=\rho+1.$$

$\rho=p$:素数,$q=R=2\sigma(p)-9=2p-7,r=B=3\sigma(R)-1=6p-19.$
$p,q=2p-7,r=6p-19$ はウルトラ三つ子素数

End

13　$m = -28$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

はじめにパソコンで数表を出す.

表 19: $m = -28$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a		$p = a/7$	$q = 2p - 5$	$r = 14p - 29$	$r + 1$	$(r + 1 - m)/2$
16	2^4					
26	$2 * 13$			0	1	14.5
35	$5 * 7$	5	5	41	42	35
98	$2 * 7^2$	14	23	167	168	98
128	2^7	18.28571429	31.57142857	227	228	128
161	$7 * 23$	23	41	293	294	161
413	$7 * 59$	59	113	797	798	413
623	$7 * 89$	89	173	1217	1218	623
959	$7 * 137$	137	269	1889	1890	959
1253	$7 * 179$	179	353	2477	2478	1253

ウルトラ完全数 ニュータイプの定義式に $m = -28$ を代入すると次のようになる.

$A = \sigma(a) - 28$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a - 28$.

$m = -28$ のときの数表を見ると $a = 7p, (p \neq 7$: 素数), の解が多いことに気づく.

$a = 7p$ とおくとき, $A = \sigma(a) - 28 = 8p + 8 - 28 = 8p - 20 = 4q, (q = 2p - 5)$

そこで q は素数と仮定すると,4, q は互いに素なので, $\sigma(A) = \sigma(4q) = 7(q + 1)$. $B = \sigma(A) - 1 = 7q + 6$. $r = 7q + 6$ とおきこれも素数と仮定する.

$\sigma(B) = r + 1 = 7q + 7 = 7(2p - 5 + 1) = 14p - 28 = 2a + m$.

ゆえに, 次の結果を証明できた.

定理 3 $p, q = 2p - 5, r = 7q + 6$ がどれも素数なら, $a = 7p$ は $m = -28$ ウルトラ完全数ニュータイプの解になる.

このとき $(p, q = 2p - 5, r = 7q + 6)$ をウルトラ三つ子素数という. このとき $7p$ はウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

ここにおいて $r = 7q + 6 = 7(2p - 5) + 6 = 14p - 29$.

13.1　逆定理

a をウルトラ完全数 ニュータイプ とし,$a = 7C, (7$ と C は互いに素) と仮定する.

したがって, $A = \sigma(a) - 28$, $B = \sigma(A) - 1$ $\sigma(B) = 14C - 28$ を満たす.

$A = \sigma(7C) - 28 = 8\sigma(C) - 28 = 4(2\sigma(C) - 7)$ になり $R = 2\sigma(C) - 7$ とおくとき $A = 4R$.

$\sigma(B) = 14C - 28 \geq B + 1 = \sigma(A)$. $A = 4R$ により, R : 奇数なので,

$$\sigma(A) = \sigma(4R) = 7\sigma(R) \geq 7R + 7.$$

$\sigma(B) = 14C - 28 \geq \sigma(A) \geq 7R + 7$ になるので
$14C - 28 \geq 7R + 7$ を 7 で割って,

$$2C - 4 \geq R + 1.$$

$R = 2\sigma(C) - 7$ によると, $R + 1 = 2\sigma(C) - 6$ となり

$$2C - 4 \geq 2\sigma(C) - 6.$$

したがって,$C \geq \sigma(C) - 1$.

一般には $C \leq \sigma(C) - 1$ が成り立ち, $C = \sigma(C) - 1$. よって, C は素数 p. これよりすべての不等号が等号になり, $R = 2\sigma(C) - 7 = 2C - 5 = 2p - 5$ は素数 q.

$\sigma(B) = B + 1, \sigma(B) = 14C - 28$ により, $B + 1 = 14C - 28 = 14p - 28$. $B = r$ と書けば $r = 14p - 29$. かくして, $p, q = 2p - 5, 14p - 29$ はウルトラ三つ子素数.

表 20: $m = -14$ スーパー 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
16	2^4	17	17	17
37	37	24	59	59
43	43	30	71	71
64	2^6	113	113	113
67	67	54	119	$7 * 17$
79	79	66	143	$11 * 13$
127	127	114	239	239
128	2^7	241	241	241
151	151	138	287	$7 * 41$
199	199	186	383	383
247	$13 * 19$	266	479	479
271	271	258	527	$17 * 31$
317	317	304	619	619
331	331	318	647	647
367	367	354	719	719
379	379	366	743	743
439	439	426	863	863
487	487	474	959	$7 * 137$
512	2^9	1009	1009	1009
547	547	534	1079	$13 * 83$
619	619	606	1223	1223
631	631	618	1247	$29 * 43$
691	691	678	1367	1367
907	907	894	1799	$7 * 257$

ここでは素数解が多い.

$m = -14$

表 21: $m = -14$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a		p	$A = p - 13$	$q = A/6$	$B = r = 12q + 11$	$r + 1$	$r + 1 - 2a$
16	2^4	16	3	0.5	17	18	-14
37	37	37	24	4	59	60	-14
43	43	43	30	5	71	72	-14
64	2^6	64	51	8.5	113	114	-14
127	127	127	114	19	239	240	-14
128	2^7	128	115	19.16666667	241	242	-14
133	$7 * 19$	133	120	20	251	252	-14
199	199	199	186	31	383	384	-14
247	$13 * 19$	247	234	39	479	480	-14
317	317	317	304	50.66666667	619	620	-14
331	331	331	318	53	647	648	-14
343	7^3	343	330	55	671	672	-14
367	367	367	354	59	719	720	-14
379	379	379	366	61	743	744	-14
439	439	439	426	71	863	864	-14
512	2^9	512	499	83.16666667	1009	1010	-14
619	619	619	606	101	1223	1224	-14
691	691	691	678	113	1367	1368	-14
919	919	919	906	151	1823	1824	-14
1027	$13 * 79$	1027	1014	169	2039	2040	-14
1051	1051	1051	1038	173	2087	2088	-14

表 22: $m = -14$, スーパー完全数とウルトラ完全数 ニュータイプ ($r = 12q + 11$)

a		A		$q = A/6$	r	factor	a		B
16	2^4	17	17		45		16	2^4	17
37	37	24	$2^3 * 3$	4	59		37	37	59
43	43	30	$2 * 3 * 5$	5	71		43	43	71
64	2^6	113	113		237		64	2^6	113
67	67	54	$2 * 3^3$	9	119	7*17			
79	79	66	$2 * 3 * 11$	11	143	11*13			
127	127	114	$2 * 3 * 19$	19	239		127	127	239
128	2^7	241	241		493		128	2^7	241
151	151	138	$2 * 3 * 23$	23	287		133	$7 * 19$	221
199	199	186	$2 * 3 * 31$	31	383		199	199	383
247	$13 * 19$	266	$2 * 7 * 19$		543		247	$13 * 19$	479
271	271	258	$2 * 3 * 43$	43	527	17*31			
317	317	304	$2^4 * 19$		619		317	317	619
331	331	318	$2 * 3 * 53$	53	647		331	331	647
367	367	354	$2 * 3 * 59$	59	719		343	7^3	581
379	379	366	$2 * 3 * 61$	61	743		367	367	719
439	439	426	$2 * 3 * 71$	71	863		379	379	743
487	487	474	$2 * 3 * 79$	79	959	7*137	439	439	863
512	2^9	1009	1009		2029		512	2^9	1009
547	547	534	$2 * 3 * 89$	89	1079	13*83			
619	619	606	$2 * 3 * 101$	101	1223		619	619	1223
631	631	618	$2 * 3 * 103$	103	1247	29*43			
691	691	678	$2 * 3 * 113$	113	1367		691	691	1367
907	907	894	$2 * 3 * 149$	149	1799		919	919	1823
919	919	906	$2 * 3 * 151$	151	1823		1027	$13 * 79$	1919
991	991	978	$2 * 3 * 163$	163	1967	7*181			

14　$m = -2 - 2\mu$, μ : 完全数

$m = -14$ での結果は完全数の場合に一般化される.

$m = -2 - 2\mu$, (μ : 完全数) のとき $a = p$(p : 素数) がウルトラ完全数 ニュータイプになるのはどんなときか考える.

条件から $A = \sigma(a) - 2 - 2\mu$, $B = \sigma(A) - 1$ を満たす.

さて, $A = p+1-2-2\mu$ は素数 Q の μ 倍とする. すなわち, $A = p+1-2-2\mu = \mu Q$. Q と μ は互いに素とする.

$\sigma(\mu) = 2\mu$ によって, $\sigma(A) = \sigma(\mu Q) = 2\mu\sigma(Q) = 2\mu(Q+1)$.

$B = \sigma(A) - 1 = 2\mu(Q+1) - 1$ は素数と仮定する.

計算してみると

$$\sigma(B) = B + 1 = 2\mu(Q+1) = 2p - 2 - 2\mu.$$

$2p - 2 - 2\mu = 2a + m$ なので,$\sigma(B) = 2a + m$. これにより.

$a = p$(p : 素数) のとき, $A = p + 1 - 2 - 2\mu = \mu Q$ (Q : 素数), $B = 2\mu(Q+1) - 1$ は素数とすると, $a = p$ は ウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

14.1　逆定理

$m = -2 - 2\mu$, μ : 完全数 は仮定されている.

$a = p$ 素数と仮定する. これはウルトラ完全数 ニュータイプ になると仮定する. すなわち

$A = \sigma(a) - 2 - 2\mu = p - 1 - 2\mu$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a + m = 2a - 2 - 2\mu$ を満たすとする.

$A = \mu Q$, とかけて Q, μ は互いに素と仮定する. $A = \mu Q = \sigma(a) - 2 - 2\mu = p - 1 - 2\mu$ により $p = \mu Q + 1 + 2\mu$.

$$\sigma(B) \geq B + 1 = \sigma(A) = 2\mu\sigma(Q) \geq 2\mu(Q+1) = 2\mu + 2\mu Q.$$

$p = \mu Q + 1 + 2\mu$ によると $2\mu + 2\mu Q = 2\mu + 2(p - 1 - 2\mu) = 2p - 2 - 2\mu$.

一方, $\sigma(B) = 2p - 2 - 2\mu$ が仮定なので, 不等号がすべて等号になり, $\sigma(B) = B + 1, \sigma(Q) = Q + 1$. $B = 2\mu\sigma(Q) - 1$ が素数.

15 平行移動 m ,底 を素数 P とするスーパー完全数

P を底とするスーパー完全数の定義は次の通り. 指数 e について, $a=P^e$ として, 平行移動 m とするとき $q=\sigma(a)+m$ を素数と仮定する.

したがって $\sigma(q)=q+1$ となる. あらためて, $A=\sigma(a)+m$ とおき, $\sigma(A)=q+1$ に注目する.

$\overline{P}=P-1, W=P^{e+1}-1$ とおくとき, $q-m=\dfrac{W}{\overline{P}}$ になり,

$$q+1=\frac{W}{\overline{P}}+1+m=\frac{W+\overline{P}(1+m)}{\overline{P}}=\frac{P^{e+1}+P-2+m\overline{P}}{\overline{P}}$$

.

これより

$$\overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}.$$

定義 3 $A=\sigma(a)+m, \overline{P}\sigma(A)=aP+P-2+m\overline{P}$ を m だけ平行移動した素数 P を底とするスーパー完全数の連立方程式, その解を m だけ平行移動した素数 P を底とするスーパー完全数という.

$P=2$ のときは $\sigma(A)=2a+m$.

16 $P=3$ スーパー 完全数の例

表 23: $P=3, m=-2$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
3	3	2	2
9	3^2	11	11
49	7^2	55	5*11
729	3^6	1091	1091
6561	3^8	9839	9839

表 24: $P=3, m=-1$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
3	3	3	3

表 25: $P=3, m=0$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
9	3^2	13	13
729	3^6	1093	1093
531441	3^12	797161	797161

表 26: $P=3, m=1$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
3	3	5	5
27	3^3	41	41
31	31	33	3*11
119	$7*17$	145	5*29
215	$5*43$	265	5*53
383	383	385	5*7*11
2239	2239	2241	3^3*83
2303	7^2*47	2737	7*17*23
10415	$5*2083$	12505	5*41*61
46591	46591	46593	$3^2*31*167$

表 27: $P = 3, m = 3$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
3	3	7	7
27	3^3	43	43
243	3^5	367	367
19683	3^9	29527	29527

表 28: $P = 3, m = 4$: スーパー 完全数

a	factor	A	factor
9	3^2	17	17
729	3^6	1097	1097

17 平行移動 m ,底 を素数 P とするウルトラ完全数II 型

P を底とするスーパー完全数の定義を復習する. 指数 e について, $a = P^e$ として, 平行移動 m とするとき $q = \sigma(a) + m$ を素数と仮定する.

$A = \sigma(a) + m$ とおき, $\sigma(A) = q + 1$ に注目する.

$\overline{P} = P - 1, W = P^{e+1} - 1$ とおくとき, $q - m = \dfrac{W}{\overline{P}}$ になり,

$$q + 1 = \frac{W}{\overline{P}} + 1 + m = \frac{W + \overline{P}(1+m)}{\overline{P}} = \frac{P^{e+1} + P - 2 + m\overline{P}}{\overline{P}}$$

.

$A = \sigma(a) + m$ とおいたがこれは素数 q なので,

$\sigma(A) = A + 1$. $B = \sigma(A) - 1$ も素数 q なので

$\sigma(B) = q + 1$. そこで,

$$q + 1 = \frac{aP + 1}{+} P - 2 + m\overline{PP}$$

. を用いて $\overline{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\overline{P}$.

定義 4 $A = \sigma(a) + m$ とおき, $B = \sigma(A) - 1$, $\overline{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\overline{P}$.

を満たす a を平行移動 m , 底 を素数 P とするウルトラ完全数 *II* 型 という.

ウルトラ完全数II 型 をウルトラ完全数ニュータイプとも呼ぶ.

A はウルトラ完全数II 型 a のパートナー, B はシャドウと呼ばれる.

これは 2018 年 7 月 22 日に導入された. 次の結果は決定的な結果である.

命題 7 ウルトラ完全数 *II* 型 において解 $a = P^e$ となるならパートナー A は素数で シャドウ B に等しい.

Proof.

$a = P^e$ と仮定するとき, $\sigma(A) = A + 1$ を示せばよい.

$\sigma(a) = \frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} = \frac{aP-1}{\overline{P}}$ を使う.

$aP + P - 2 + m\overline{P} = \overline{P}\sigma(B)$ より $\sigma(B) \geq B - 1 = \sigma(A)$ に注意して

$$aP + P - 2 + m\overline{P} = \overline{P}\sigma(B) \geq \overline{P}(B + 1) = \overline{P}\sigma(A).$$

$aP + P - 2 + m\overline{P} = \sigma(a)\overline{P} + \overline{P} + m\overline{P} = \overline{P}(\sigma(a) + 1 + m)$ によると

$$\overline{P}(\sigma(a) + 1 + m) \geq \overline{P}\sigma(A).$$

ゆえに

$$A + 1 = \sigma(a) + 1 + m \geq \sigma(A).$$

したがって $A + 1 = \sigma(a) + 1 + m = \sigma(A)$ になり A は素数で, 定義よりシャドウ B に等しい.

表 29: $P = 3, m = -8$: Ultra ultimate perfect number , NT.

$a = p$	$factor$	$A = p - 7 = 2q$	factor	$B = r = 3q + 2$
9	3^2	5	5	5
13	13	6	2*3	11
17	17	10	2*5	17
41	41	34	2*17	53
53	53	46	2*23	71
81	3^4	113	113	113
173	173	166	2*83	251
353	353	346	2*173	521
401	401	394	2*197	593
461	461	454	2*227	683
521	521	514	2*257	773
593	593	586	2*293	881
641	641	634	2*317	953
773	773	766	2*383	1151

End.
$m = -8$
$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - 1$, $\overline{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\overline{P}$.
に $a = p$:奇素数, $m = -8, P = 3$ とすると
$A = \sigma(a) + m = p - 7$, $B = \sigma(A) - 1$, $2\sigma(B) = \overline{P}\sigma(B) = aP + P - 2 + m\overline{P} = 3p + 1 - 16 = 3(p - 5)$.
$p - 7 = 2q, q$: 奇数とすると, $A = p - 7 = 2q$ なので $2\sigma(B) = 3(p - 5) = 6(q + 1)$.

命題 8 $p - 7 = 2q, q$: 奇数とする.
$A = p - 7 = 2q$ のとき q と $B = 3q + 2$ はともに素数.

Proof.
仮定より

$$\begin{aligned} 6(q+1) &= 2\sigma(B) \\ &\geq 2(B+1) \\ &= 2\sigma(A) \\ &= 2\sigma(2q) \\ &= 6\sigma(q) \\ &\geq 6(q+1) \end{aligned}$$

したがって総ての以上記号が等号になり, B, q は素数になる,

End
$p = 2q + 7, B + 1 = 3q + 3$. よって $q, p = 2q + 7, B = 3q + 2$ はウルトラ三つ子素数.
高橋の公式でウルトラ三つ子素数を求めた.

表 30: Ultra triplets

q	$p = 2q + 7$	$B = 3q + 2$
3	13	11
5	17	17
17	41	53
23	53	71
83	173	251
173	353	521
197	401	593
227	461	683
257	521	773
293	593	881

参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] C.F.Gauss(カール・フリードリヒ ガウス), ガウス 整数論 (数学史叢書)(高瀬正仁訳), 共立出版社, 1995.

[3] 飯高茂 , (雑誌『現代数学』連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 ～ .

[4] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I),(II)』, 現代数学社 ,2016.

[5] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (III),(IV)』, 現代数学社 ,2017.

[6] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (V)』, 現代数学社 ,2018.

[7] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[8] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[9] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1