

1 子どもの頃

私は70過ぎになり大学の名誉教授という称号をいただきました。場合によると、世界的数学者と呼ばれたりするので、子供のころは数学関係は全部満点だったでしょうねと言われたりするのですが、実は好きだったのは事実ですが数学/算数の成績が抜群に良かったわけでは無かったのです。

計算ではよく間違えました。ソロバンの塾に通っている友達は暗算がうまく計算が得意だったのが、うらやましかったものです。

あるとき円周率の値が1000個も載っている表をみました。これはすごいと思い自分もしてみました。そして $\frac{22}{7}$ の計算をしたのです。

$$\frac{22}{7} = 3.1428571428571428571428571428571 \dots$$

なんだ繰り返しの計算だ。たいしてことない。しかし円周率の値は次のようになりわたくしの繰り返し計算とは6桁目から違うのです。

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795 \dots$$

変なことがあるものだ。それ以上深く考えることをしませんでした。

先生にきいてみる、図書館で調べるなどいろいろやり方はあるのに、飯高茂少年は「何か変だな」ですませてしまい深く考えたりしませんでした。

今からふりかえって見ると、何て探求心がない少年だったのだろう、と思い情けないです。

数学が好きになる秘訣は深く考え続け計算でも疑問があれば何日も続けてやってみることです。標語的に言えば魂を込めて数学に向き合うことこれが数学が好きになる秘訣です

今回は割り算をするだけですが計算をしながら不思議な数学に出会うこととなりますここでは皆さんに計算してもらいますが全部はできないと思います自宅に帰っても計算を継続すると体が数学好きに変身することでしょう

2 循環節と余りの列

分数 $\frac{22}{7}$ の計算結果、142857 が無限に繰り返されることには感動しました。

このような142857を循環節といい、より丁寧に[1,4,2,8,5,7]と書くこともあり、これをリスト表示といいます。

ここには6個の数があるので循環節の長さは6と言います。場合によっては周期が6とも言うこともあります。

循環節に出てくるリストにはどんな数が並ぶのか考えました。例えば、私は自分の誕生日5.29を循環節[5,2,9]に持つ分数があるのだろうかとか疑問に持ちました。

その答えは簡単で、分数 $\frac{529}{999}$ を小数に展開すると0.529529529...となります。

正気言ってこれには失望しました。

しかし、分数 $\frac{1}{7} = 142857142857 \dots$ となります。

その循環節リスト [1,4,2,8,5,7] を半分に分けると 142 と 857 になりこれらを足すと 999 (これを 2 分割和は 999 という.)

このことはよく知られていた事実のようですが私はこれを知って感動しました.

大学で 1 年生にこのことを教えてやるとみな感激します.

学生のうちの一人は [1,4,2,8,5,7] を 3 つに分けると 14, 28, 57 になります.

これらを足すと 99 になります. (これを 3 分割和は 99 という.) というのです. これには正直言って驚きました.

今度は [1,4,2,8,5,7] を 6 つに分けると 1,4, 2,8, 5, 7 になります. これらを足すと $27=9 \cdot 3$. 9 の倍数になります.

そういう意味でこれらはお仲間の性質です.

割り算の仕方を少し詳しく見てみます.

分数 $\frac{1}{7}$ を小数に展開するとき最初に 分子 1 の右となりに 0 を書きます. これは 10 倍することになりこれを 7 で割ると商は 7 で余りが 3.

$$1 \times 10 = 10 = 1 \cdot 7 + 3$$

$$3 \times 10 = 30 = 4 \cdot 7 + 2$$

$$2 \times 10 = 20 = 2 \cdot 7 + 6$$

$$6 \times 10 = 60 = 8 \cdot 7 + 4$$

$$4 \times 10 = 40 = 5 \cdot 7 + 5$$

$$5 \times 10 = 50 = 7 \cdot 7 + 1$$

ここで 1 が出て元へ戻り繰り返します.

中央の縦の数を見ると, [1,4,2,8,5,7] が並びこれらは商の列ですがまさに循環節.

末尾の縦の数を見ると, [3,2,6,4,5,1] が並びこれを余りの列と呼びます.

循環節リスト [1,4,2,8,5,7] を半分に分けると 142 と 857 になりこれらを足すと 999

余りのリスト [3,2,6,4,5,1] を半分に分けると 326 と 451 になりこれらを足すと 777 (これを 2 分割和は 777 という.)

7 は分母です. 余りの列の 2 分割和初めて注目したのは イギリスの Goodwyn で 1801 年のことです.

3 計算練習

そこで, $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}$ について小数に展開し出てきた循環節について, 2 分割和と 3 分割和を計算してください.

さらに, $\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{4}{17}, \frac{3}{17}$ について小数に展開し出てきた循環節について, 2 分割和と 4 分割和, 8 分割和を計算してください.

さらに, $\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}$ について小数に展開し出てきた循環節について, 2 分割和と 3 分割和を, 6 分割和, 12 分割和を計算してください.

一般に、 p 素数、 $k < p$ に対して $\frac{k}{p}$ の循環節の長さが偶数なら循環節の 2 分割和は 9 が並びます。

分母が素数でないと循環節の 2 分割和はいろいろ変化して研究する価値があります。

$\frac{1}{23}, \frac{1}{71}$ なども計算してほしいのですが、計算が大変なので循環節と余りの列はパソコンで求めてあります。

10 $1j(1/23, 10, X, Y)$.

$X = [0, 4, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 0, 8, 6, 9, 5, 6, 5, 2, 1, 7, 3, 9, 1, 3],$

$Y = [10, 8, 11, 18, 19, 6, 14, 2, 20, 16, 22, 13, 15, 12, 5, 4, 17, 9, 21, 3, 7, 1].$

11 $1j(1/31, 10, X, Y)$.

$X = [0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9],$

$Y = [10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28, 1].$

12 $1j(1/41, 10, X, Y)$.

$X = [0, 2, 4, 3, 9],$

$Y = [10, 18, 16, 37, 1].$

13 $1j(1/61, 10, X, Y)$.

$X = [0, 1, 6, 3, 9, 3, 4, 4, 2, 6, 2, 2, 9, 5, 0, 8, 1, 9, 6, 7, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 7, 5,$
 $5, 5, 7, 3, 7, 7, 0, 4, 9, 1, 8, 0, 3, 2, 7, 8, 6, 8, 8, 5, 2, 4, 5, 9],$

$Y = [10, 39, 24, 57, 21, 27, 26, 16, 38, 14, 18, 58, 31, 5, 50, 12, 59,$

$41, 44, 13, 8, 19, 7, 9, 29, 46, 33, 25, 6, 60, 51, 22, 37, 4, 40, 34, 35, 45, 23, 47, 43].$

これは少年ガウスが計算しました。循環節の長さは 35 です。5 分割和と 7 分割和 を計算しよう、

14 $1j(1/71, 10, X, Y)$.

$X = [0, 1, 4, 0, 8, 4, 5, 0, 7, 0, 4, 2, 2, 5, 3, 5, 2, 1, 1, 2, 6, 7,$

$6, 0, 5, 6, 3, 3, 8, 0, 2, 8, 1, 6, 9],$

$Y = [10, 29, 6, 60, 32, 36, 5, 50, 3, 30, 16, 18, 38, 25, 37, 15, 8, 9,$

$19, 48, 54, 43, 4, 40, 45, 24, 27, 57, 2, 20, 58, 12, 49, 64, 1].$

15 $1j(1/79, 10, X, Y)$.

$X = [0, 1, 2, 6, 5, 8, 2, 2, 7, 8, 4, 8, 1],$

$Y = [10, 21, 52, 46, 65, 18, 22, 62, 67, 38, 64, 8, 1].$

分母は素数の平方である 49.

16 $1j(1/49,10,X,Y)$.

$X = [0, 2, 0, 4, 0, 8, 1, 6, 3, 2, 6, 5, 3, 0, 6, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 9, 7, 9, 5,$
 $9, 1, 8, 3, 6, 7, 3, 4, 6, 9, 3, 8, 7, 7, 5, 5, 1],$

$Y = [10, 2, 20, 4, 40, 8, 31, 16, 13, 32, 26, 15, 3, 30, 6, 11, 12, 22, 24, 44, 48, 39,$
 $47, 29, 45, 9, 41, 18, 33, 36, 17, 23, 34, 46, 19, 43, 38, 37, 27, 25, 5, 1].$

17 $1j(1/17,10,X,Y)$.

$X = [0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7],$

$Y = [10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1].$

18 $1j(1/19,10,X,Y)$.

$X = [0, 5, 2, 6, 3, 1, 5, 7, 8, 9, 4, 7, 3, 6, 8, 4, 2, 1],$

$Y = [10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2, 1].$

分母は\$3p\$ の場合です.

19 $1j(1/21,10,X,Y)$.

$X = [0, 4, 7, 6, 1, 9],$

$Y = [10, 16, 13, 4, 19, 1].$

20 $1j(1/33,10,X,Y)$.

$X = [0, 3],$

$Y = [10, 1].$

21 $1j(1/51,10,X,Y)$.

$X = [0, 1, 9, 6, 0, 7, 8, 4, 3, 1, 3, 7, 2, 5, 4, 9],$

$Y = [10, 49, 31, 4, 40, 43, 22, 16, 7, 19, 37, 13, 28, 25, 46, 1].$

22 $1j(1/57,10,X,Y)$.

$X = [0, 1, 7, 5, 4, 3, 8, 5, 9, 6, 4, 9, 1, 2, 2, 8, 0, 7],$

$Y = [10, 43, 31, 25, 22, 49, 34, 55, 37, 28, 52, 7, 13, 16, 46, 4, 40, 1].$

10 進数ではなく 5 進数の場合.

2 分割和を 5 進数で計算しよう,

23 $1j(1/7,5,X,Y)$.

$$X = [0, 3, 2, 4, 1, 2],$$

$$Y = [5, 4, 6, 2, 3, 1].$$

$$24 \quad 1j(1/11,5,X,Y).$$

$$X = [0, 2, 1, 1, 4],$$

$$Y = [5, 3, 4, 9, 1].$$

$$25 \quad 1j(1/13,5,X,Y).$$

$$X = [0, 1, 4, 3],$$

$$Y = [5, 12, 8, 1].$$

$$26 \quad 1j(1/17,5,X,Y).$$

$$X = [0, 1, 2, 1, 3, 4, 0, 2, 4, 3, 2, 3, 1, 0, 4, 2],$$

$$Y = [5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1].$$

$$27 \quad 1j(1/19,5,X,Y).$$

$$X = [0, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 4, 1],$$

$$Y = [5, 6, 11, 17, 9, 7, 16, 4, 1].$$

$$28 \quad 1j(1/23,5,X,Y).$$

$$X = [0, 1, 0, 2, 0, 4, 1, 3, 3, 2, 1, 4, 3, 4, 2, 4, 0, 3, 1, 1, 2, 3],$$

$$Y = [5, 2, 10, 4, 20, 8, 17, 16, 11, 9, 22, 18, 21, 13, 19, 3, 15, 6, 7, 12, 14, 1].$$

4000 年も前は古代バビロニア人は 60 進法でした。

分数 $\frac{1}{7}$ を 60 進法で小数に直すと、循環節の長さは 3 であることを発見しました。

無限に [8, 34, 17] が繰り返すことを知り恐怖を覚えたそうです。(室井和男)

分母の 7 が注目されるうちに意味が反転し ラッキーセブンという考えが生まれたそうです。(室井和男)

3 分割和 を計算しよう,

$$31 \quad 1j(1/7,60,X,Y).$$

$$X = [8, 34, 17],$$

$$Y = [4, 2, 1].$$

5 分割和を計算しよう,

32 $1j(1/11,60,X,Y)$.

$X = [5, 27, 16, 21, 49]$,

$Y = [5, 3, 4, 9, 1]$.

2分割和を計算しよう,

33 $1j(1/13,60,X,Y)$.

$X = [4, 36, 55, 23]$,

$Y = [8, 12, 5, 1]$.

2分割和を計算しよう,

34 $1j(1/17,60,X,Y)$.

$X = [3, 31, 45, 52, 56, 28, 14, 7]$,

$Y = [9, 13, 15, 16, 8, 4, 2, 1]$.

2分割和を計算しよう,

35 $1j(1/19,60,X,Y)$.

$X = [3, 9, 28, 25, 15, 47, 22, 6, 18, 56, 50, 31, 34, 44, 12, 37, 53, 41]$,

$Y = [3, 9, 8, 5, 15, 7, 2, 6, 18, 16, 10, 11, 14, 4, 12, 17, 13, 1]$.

2分割和を計算しよう,

36 $1j(1/23,60,X,Y)$.

$X = [2, 36, 31, 18, 15, 39, 7, 49, 33, 54, 46, 57, 23, 28, 41, 44, 20, 52, 10, 26, 5, 13]$

$Y = [14, 12, 7, 6, 15, 3, 19, 13, 21, 18, 22, 9, 11, 16, 17, 8, 20, 4, 10, 2, 5, 1]$.