平行移動mのスーパ完全数で、mが6の倍数のときについて

○ 菊地能乃・堀内陽介 (広尾学園高等学校 数論チーム)

要旨

自然数の約数の和を表すユークリッド関数について、完全数の考えを拡張したスーパー完全数にさらに平行移動の概念を導入した平行移動mのスーパー完全数がある。先行研究として平行移動mの値を変えて、mが6の倍数のとき解は2の累乗が圧倒的に多いことが発見されている。しかし解aが2^e以外のスーパー完全数が現れる条件は分かっていない。本研究では解aが2^eの形のもののみ研究した。平行移動mのスーパー完全数においてmが6の倍数のとき解aにどのような特徴があるか調べ、いくつかの結果を得た。研究成果としては、例えばmが30でありa=2^{10k}のときqは素数にはならないため、このとき解aはスーパー完全数とはいえないということが分かった。

背景

完全数の問題は古くから研究されている未解決の難問とされていて、主に約数の和を表すユークリッド関数が研究に使われてきた。先輩方も以前ユークリッド関数についてa=mp問題について研究し、m=21のときの擬素数解を求めた。また飯高茂氏により平行移動mのスーパー完全数の定義が提唱され、完全数について豊富な結果が得られるようになった。そこで平行移動mのスーパー完全数について研究することにした。

ユークリッド関数 [1]

定義. 自然数aの約数の和をσ(a)と表したものをユークリッド関数という。

例）σ(6)=1+2+3+6=12

性質. ・pを素数とするとσ(p)=p+1

・σ(1)=1

・n＞1 のとき、σ(n)≧n+1

・a,bが互いに素のときσ(ab)=σ(a)σ(b)と表せる(乗法性)

・qを素数とするとσ(q^e)= $\dfrac{q^{e+1}-1}{q-1}$ （等比数列の和の公式より）

完全数 [2]

σ(a)=2aとなるaを完全数という。p=2^{e+1}-1を素数（メルセンヌ素数）、α=2^epとするとσ(α)=σ(2^ep)=σ(2^e)σ(p)=(2^{e+1}-1)(p+1)=2αより、αは完全数である。逆に、αが偶数完全数ならば、α=2^epという形をしていることもオイラーによって示されている。

スーパー完全数 [3]

定義. σ(σ(a))=2aを満たす自然数aをスーパー完全数という。

定理. p=2^{e+1}-1を素数、a=2^eとするとaはスーパー完全数である。

証明. p=2^{e+1}-1を素数、a=2^eとすると

σ(a)=σ(2^e)=2^{e+1}-1=p と変形でき、

σ(p)=p+1=2^{e+1}=2a となる。

従ってσ(σ(a))=2aとなり、aはスーパー完全数である。

平行移動mのスーパー完全数 [3]

定義. σ(σ(a)+m)=2a+mを満たす自然数aを平行移動mのスーパー完全数という。

定理1. q=2^{e+1}-1+mを素数、a=2^eとするとaは平行移動mのスーパー完全数である。

証明. q=2^{e+1}-1+mを素数とすると、σ(q)=q+1 ･･･（＊）

また、a=2^eとすると、

（＊）左辺は、q=σ(a)+m よりσ(q)=σ(σ(a)+m) となる。

（＊）右辺は、q+1=2a+m となる。

従って、σ(σ(a)+m)=2a+m となり、aは平行移動mのスーパー完全数である。

定理2. a=2^eが平行移動mのスーパー完全数ならばq=2^{e+1}-1+m は素数である。

定理1.2.より、**a=2^eが平行移動mのスーパー完全数**

⇔ q=2^{e+1}-1+m は素数

2^eの形の平行移動mのスーパー完全数と2^{e+1}-1+mの形の素数（擬メルセンヌ素数）は1対1に対応する。

研究テーマ

上の表はm=6のときとm=30のときの解のみだが、mが6の倍数のとき解aは圧倒的に2の累乗の形が多いことが分かっている。また、mが6の倍数のとき解aが2の奇数乗であるものは見つからない。他にもm=18のときやm=24のときに解が非常に少ないことなど、mが6の倍数のとき多くの疑問点が見つかった。そこで平行移動mのスーパー完全数でmが6の倍数のときについて研究することにした。

σ(σ(a)+m)=2a+m, m=6 のときの解 [3]

a	a素因数分解	q	q素因数分解
1	1	7	7
4	2^2	13	13
16	2^4	37	37
49	7^2	103	103
1024	2^{10}	2053	2053

σ(σ(a)+m)=2a+m, m=30 のときの解 [3]

a	a素因数分解	q	q素因数分解
1	1	31	31
4	2^2	37	37
16	2^4	61	61
64	2^6	157	157
256	2^8	541	541
4096	2^{12}	8221	8221
16384	2^{14}	32797	32797
65536	2^{16}	131101	131101

本研究の成果1

定理. **mが6の倍数、a=2^eのeが奇数のときaはスーパー完全数ではない。**

証明. m=6k、a=2^e 、eが奇数であるとき、

q=2^{e+1}-1+6k において

2^{e+1} は3で割って1余るので、2^{e+1}-1 は3の倍数である。

6kも3の倍数であるので、qは3の倍数となる。

つまりqは素数ではないので、a=2^eは平行移動mのスーパー完全数ではない。

本研究の成果2

定理. **m=30、a=2^{10k}のとき、aはスーパー完全数ではない。**

証明. m=30、a=2^{10k} のとき

q=2^{10k+1}-1+30=2^{10k+1}+29=**2(2^{10k}-1)+31**

ここで qが素数でないことを確かめる。

$2^{10k} \equiv (2^5)^{2k} \equiv 1 \pmod{31}$

よって 2^{10k}-1 は常に31の倍数である。

つまりqは31を約数に持つため、qは素数ではない。

aがスーパー完全数であるときqは素数である。

したがってm=30、a=2^{10k}のときaはスーパー完全数ではない。

今後の展望

a=2^{12}とa=2^{28}はm=18のスーパー完全数の解であることが分かった。このことから、e≡4(mod8)の場合がスーパー完全数の可能性があると予想されるので、今後精査したい。それから、mが6の倍数のときの解にはまだ多くの疑問点があるので研究していきたい。また、mの値を6の場合に限らず他の値でも調べ、できるだけ一般化したい。

参考文献

[1]数学の研究をはじめよう(Ⅲ)ー素数の織りなす世界を見てみよう 飯高茂 2017/04/20

[2]数学の研究をはじめよう(Ⅰ)ー高校生にもできる新しい数学研究へのいざない 飯高茂 2016/05/26

[3]数学の研究を始めようⅤ オイラーをモデルに数論研究 飯高茂 2018/7/20