禁断の完全数

飯高 茂

2020/3/6

1　前書き

梶田光君の研究で得られた次の定理では $q = 3 * 2^{e+1} - 1$ が素数になる場合が重要である.

定理 1 (H.Kajita) $\mathrm{co}\varphi(a) = 3 \cdot 2^e (e > 0)$ の解は $a = 9 \cdot 2^{e-1}$ と $a = 2^{\varepsilon} p(p = 3 \cdot 2^{e-\varepsilon+1} - 1 \in \mathrm{prime})$ と表される.

ここで $\mathrm{co}\varphi(a) = a - \varphi(a)$ はオイラーの余関数である.
私はこれに着目して 奇素数 h を固定し $q = h * 2^{e+1} - 1$ が素数になる場合, これを 乗数 h の Mersenne 素数とよぶことにした.

2　乗数 h のメルセンヌ素数の諸例

比較のため古典的なメルセンヌ素数も書いておく.

表 1: メルセンヌ素数

e	$2^e - 1$
2	3
3	7
5	31
7	127
13	8191
17	131071
19	524287
31	2147483647

$e > 2$ のとき $2^e - 1$ の末尾は 1,7.

命題 1 $e > 1$ のとき $q = 3 * 2^e - 1$ の末尾は *1,3,7.*

表 2: 乗数 3 のメルセンヌ素数

e	$3*2^e-1$
1	5
2	11
3	23
4	47
6	191
7	383
11	6143
18	786431
34	51539607551

Proof

最初に 法を 5 で見ると, $q \equiv 0,1,2,3,4 \mod 5$.

$q > 5$ なので, $q \equiv 0$ は起きない. $q \equiv 4$ を仮定する.

$q = 3*2^e - 1 \equiv -2^{e+1} - 1 \equiv -1 \mod 5$.

$2^{e+1} \equiv 0 \mod 5$ により,$2^{e+1} = 5k$ なので矛盾.

したがって, $q \equiv 1,2,3 \mod 5$.

ここで q:奇数なので, $q \equiv 1,7,3 \mod 10$.

q.e.d.

表 3: 乗数 5 のメルセンヌ素数

e	$5*2^e-1$
2	19
4	79
8	1279
10	5119
12	20479
14	81919
18	1310719
32	21474836479

命題 2 $q = 5*2^e - 1$ *の末尾は 9.*

Proof

$q = 5*2^e - 1 \equiv 4 \mod 5$.

ここで q:奇数なので, $q \equiv 9 \mod 10$.

q.e.d.

表 4: 乗数 7 のメルセンヌ素数

e	$7*2^e-1$
1	13
5	223
9	3583
17	917503
21	14680063
29	3758096383

命題 3 $7*2^e-1$ の末尾は *3.*

Proof

i. e が偶数とする. $e=2h$ として, 3 を法とする.
$q=7*2^e-1 \equiv 2^e-1=2^{2h}-1 \equiv 2^2-1=0 \bmod 3.$
よって, q:は 3 の倍数.
ii. e は奇数. $e=2h-1$ として, 5 を法とする.
$q=7*2^e-1 \equiv 2^{e+1}-1=2^{2h}-1 \equiv (-1)^h-1 \bmod 5.$
h: 偶数なら $q \equiv (-1)^h-1=0 \bmod 5$. よって, q:は 5 の倍数.
よって, $h=2k+1$. $e=2h-1=4k+1$.$q=7*2^e-1 \equiv 2^{e+1}-1 \equiv 2^{4k-2}-1 \equiv 3 \bmod 5$
$q=3+5k_0$. q: 奇数なので, k_0: 偶数. ゆえに, $q \equiv 3 \bmod 10$.

新型完全数

乗数 5 のメルセンヌ素数を用いて新型完全数を考えて見た.(新型感染数と間違えないでください)

これは (A,B,C) 完全数の実利のある具体例として見ると意外にも面白い.

後の発展性を考慮しここでは平行移動 m を最初から考える.

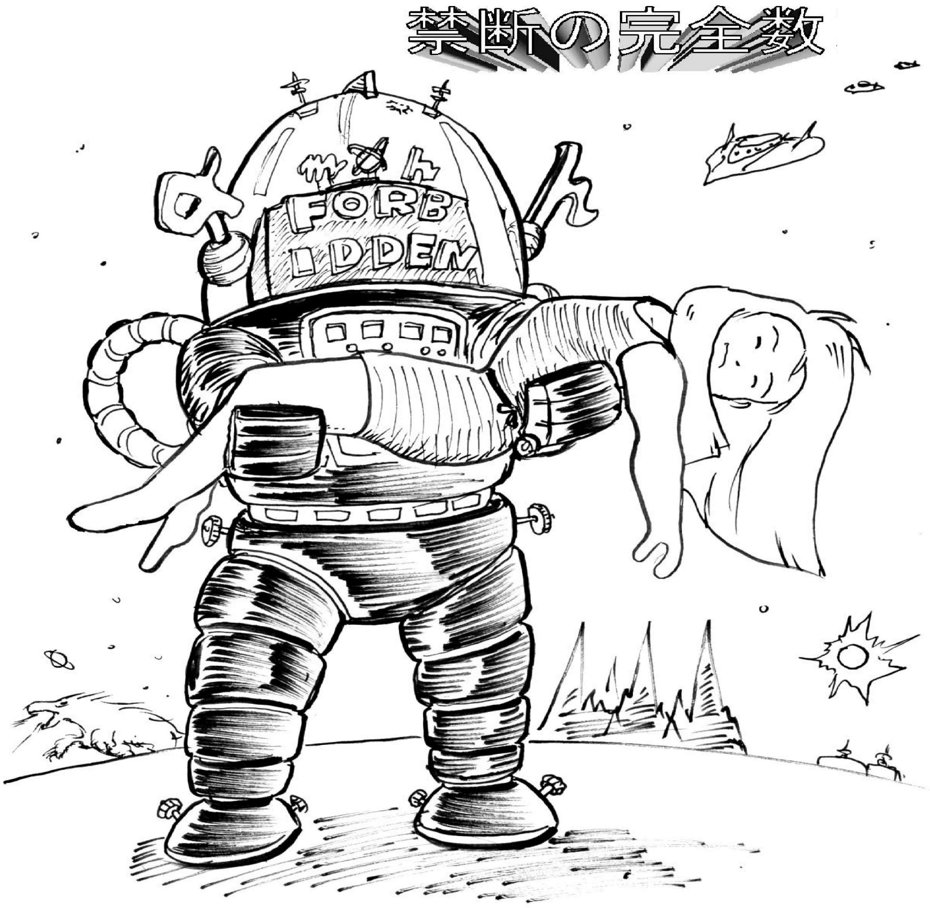

図 1: 禁断の完全数, by Jun Iitaka

3 禁断の完全数の定義

$q = h * 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定する.

$\alpha = 2^e q$ とおく. これはユークリッドの考えたいわゆるユークリッドの完全数の類似とみることができる.

$\sigma(\alpha), \varphi(\alpha)$ を次のように計算する.

$N = 2^{e+1} - 1$ と定めて式を見やすくする.

$\sigma(\alpha) = \sigma(2^e q) = N(q+1) = Nq + N$ によって, $Nq = 2^{e+1}q - q = 2\alpha - q$ となる. ゆえに

$$\sigma(\alpha) = Nq + N = 2\alpha - q + N.$$

よって,

$$\sigma(\alpha) - 2\alpha = -q + N.$$

ここで, $h=1$ とする.$q=h*2^{e+1}-1+m=2^{e+1}-1+m=N+m$ になり

$$\sigma(\alpha)-2\alpha=-q+N=-m.$$

これは平行移動 m の完全数である.

さらに, $m=0$ のときは $\sigma(\alpha)-2\alpha=0$ なので, α はまさに元祖完全数である.

オイラー関数

$h>1$ のときどうするか. ここが思案のときで,ABC 完全数として考えることにした. すなわち, オイラー関数 $\varphi(\alpha)$ を使うことにした. (わたくしはここで賭けに出たのである.)

$4\varphi(\alpha)=4\varphi(2^e q)=2^{e+1}q-2^{e+1}=2\alpha-(N+1)$ により

$$N+1=-4\varphi(\alpha)+2\alpha.$$

$q=h*2^{e+1}-1+m=h*(N+1)-1+m$ を用いると

$$\sigma(\alpha)-2\alpha=-q+N=N-(h*(N+1)-1+m)=(N+1)(1-h)-m.$$

$N+1=-4\varphi(\alpha)+2\alpha$ を代入することにより

$$\sigma(\alpha)-2\alpha=(N+1)(1-h)-m=(-4\varphi(\alpha)+2\alpha)(1-h)-m.$$

整理して

$$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2(2-h)\alpha-m.$$

こうしてできた式を乗数 h , 平行移動 m の禁断の完全数の定義式とする.

これを満たす自然数 a を乗数 h , 平行移動 m の禁断の完全数と呼ぶ.

ここで,$N_1=-4\varphi(\alpha)+2\alpha$, $q^*=hN_1+1-m$ によって新しい不変量を導入する.

q^* を乗数 h の疑似メルセンヌ数, N_1 を疑似 2 べきという.

$h=1$ のとき,$\sigma(\alpha)=2\alpha-m$

$h=3$ のとき,$\sigma(\alpha)-8\varphi(\alpha)=-2\alpha-m.$

事実 1 以下で, 禁断の完全数という名称をつけた理由を説明する.

乗数 h のメルセンヌ数を基に完全数の拡張を定義する試みにあたって, うまく行くという確証がなかった. 定義はしたものの解が少なくて, 出た解も面白くないかもしれない. そこで一応定義してみた.

完全数の一般化を試みたのは *6* 年ほど前のことだが素数 q の処置に困って, 解 a の最大素因子を示す記号 Maxp を用いた. それで定義はできて計算は可能になったが, 面白い結果に乏しかった.

ABC 完全数の概念を構想してそこではオイラー関数を, ユークリッド関数と対等に扱うことになった.

乗数 h のメルセンヌ数を基に完全数の拡張ができたがこれがどんなものかパソコンで解の探索を行い多くの数表を作るまで不安感が強かった.

私はそのとき, 中学 *2* 年生のころ見た *SF* 映画の傑作 *[*禁断の惑星*]* を思い出していた.

未知の惑星第 *4* アルテアに降りてどんな生物がいるか心配しながら探索を行う乗組員の不安な気持ちを共有しながら, 今回できた新型完全数を探検すると驚くほど, 多様で美しい種々の構造をもつ数に出会った. 私は, 賭けに勝ったと思った.

こうしてできた新型完全数には禁断の完全数と呼ぶのがふさわしいと思っている.

3.1 A 型解

α を A 型解とする. すなわち, $\alpha = 2^eQ, (Q:$ 奇素数$)$ とおく. $N = 2^{e+1} - 1, R = 2^{e+1}$ とすると

$\sigma(\alpha) = N(Q+1) = (R-1)(Q+1), 4(1-h)\varphi(\alpha) = (1-h)(Q-1), -2(2-h)\alpha = (h-2)RQ$ によって,

$$
\begin{aligned}
-m &= \sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) + 2(h-2)\alpha \\
&= (R-1)(Q+1) + R(1-h)(Q-1) + (h-2)RQ \\
&= R(Q+1+(1-h)(Q-1)+(1-h)(Q-1)) - Q - 1 \\
&= Rh - Q - 1
\end{aligned}
$$

ゆえに, $Rh - Q - 1 = -m$. これより $Q = Rh - 1 + m = h2^{e+1} - 1 + m$.

$h = 1, m = 0$ なら $Q = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数になる.

$h > 2, m = 0$ なら $Q = h2^{e+1} - 1$ は素数なのでこれを乗数 h のメルセンヌ素数という.

一般には $Q = h2^{e+1} - 1 + m$ と書ける素数を平行移動 m, 乗数 h のメルセンヌ素数という.

命題 4 *α が A 型解, すなわち, $\alpha = 2^eQ, (Q:$ 奇素数$)$ のとき q^* を乗数 h の疑似メルセンヌ数とすると, $q^* = h2^{e+1} - 1 + m$,*

N_1 を疑似 2 べきとすると $N_1 = 2^{e+1}$.

Proof

定義により $4\varphi(\alpha) = 2^{e+1}(Q-1)$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= -4\varphi(\alpha) + 2\alpha \\
&= -2^{e+1}(Q-1) + 2^{e+1}(Q) = 2^{e+1}.
\end{aligned}
$$

同様に $q^* = hN_1 - 1 + m = h2^{e+1} - 1 + m$.

q.e.d.

4　一般な数表

定義式 $\sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(h-2) - m$ において

$N_1 = -4\varphi(\alpha) + 2\alpha - 1$, $q^* = h * (N+1) - 1 + m$ を与える数表を作る.

A 型解 $\alpha = 2^e q$ であれば $q^* = q$: 素数 (乗数 h, 平行移動 m のメルセンヌ素数), $N_1 = 2^e$ となる.

それ以外なら 素数や 2 べきの性質が崩れていく.

以下では $h = 3$ の場合を扱う.

表 5: 禁断の完全数 $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2)-m, h=3$

a	素因数分解	q^*	素因数分解	N_1
$m=-10$	$-2*5$			
52	2^2*13	13	13	2^3
296	2^3*37	37	37	2^4
5792	2^5*181	181	181	2^6
23872	2^6*373	373	373	2^7
96896	2^7*757	757	757	2^8
$m=-8$	-2^3			
6	$2*3$	3	3	2^2
986	$2*17*29$	531	3^2*59	2^2*3^2*5
76504	$2^3*73*131$	9735	$3*5*11*59$	2^4*7*29
108088	$2^3*59*229$	13767	$3*13*353$	2^4*7*41
$m=-6$	$-2*3$			
10	$2*5$	5	5	2^2
68	2^2*17	17	17	2^3
328	2^3*41	41	41	2^4
1424	2^4*89	89	89	2^5
97408	2^7*761	761	761	2^8
495	3^2*5*11	83	83	$2*3*5$
561795	$3*5*13*43*67$	177419	$11*127^2$	$2*3*9857$

$m=-10$ のとき A 型解が多い.
$m=-$ のとき $a=6$ は A 型解である. D 型解が多い.

表 6: 禁断の完全数 $h=3$

a	素因数分解	q^*	素因数分解	N_1
$m=-4$	-2^2			
14	$2*7$	7	7	2^2
76	2^2*19	19	19	2^3
344	2^3*43	43	43	2^4
24256	2^6*379	379	379	2^7
391936	2^8*1531	1531	1531	2^9
1742	$2*13*67$	943	$23*41$	2^2*79
12644	$2^2*29*109$	3283	7^2*67	2^3*137
$m=-2$	-2			
$m=0$	0			
22	$2*11$	11	11	2^2
92	2^2*23	23	23	2^3
376	2^3*47	47	47	2^4
6112	2^5*191	191	191	2^6
24512	2^6*383	383	383	2^7
$m=2$	2			
26	$2*13$	13	13	2^2
1552	2^4*97	97	97	2^5
6176	2^5*193	193	193	2^6
98432	2^7*769	769	769	2^8

$m=0,2$ では A 型解が多い.

表 7: 禁断の完全数

a	素因数分解	q^*	素因数分解	N_1
$m=4$	2^2			
1054	$2*17*31$	567	3^4*7	2^2*47
1846	$2*13*71$	999	3^3*37	2^2*83
$m=6$	$2*3$			
3	3	-1	-1	-2
34	$2*17$	17	17	2^2
116	2^2*29	29	29	2^3
424	2^3*53	53	53	2^4
1616	2^4*101	101	101	2^5
6304	2^5*197	197	197	2^6
24896	2^6*389	389	389	2^7
98944	2^7*773	773	773	2^8
$m=8$	2^3			
38	$2*19$	19	19	2^2
124	2^2*31	31	31	2^3
1648	2^4*103	103	103	2^5
6368	2^5*199	199	199	2^6
395008	2^8*1543	1543	1543	2^9
1898	$2*13*73$	1027	$13*79$	2^2*5*17
11036	$2^2*31*89$	2863	$7*409$	2^3*7*17
84152	$2^3*67*157$	10711	10711	2^4*223
$m=10$	$2*5$			
15	$3*5$	3	3	-2
334036	2^2*37^2*61	86145	$3*5*5743$	$2^3*37*97$

$m=6$ では A 型解が多い.

$m=0$ のときが完全数の一般化であり A 型解 2^eQ が多いが, D 型解も登場した.
A 型解 2^eQ について, $Q+1, (Q+1)/3$ を求めて数表を作った.
$Q = 3*2^f-1$ が確認される

表 8: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(h-2), m=0, h=3$

2^e*Q	Q	$Q+1$	$(Q+1)/3 = 2^f$	
$2*11$	11	12	4	2^2
2^2*23	23	24	8	2^3
2^3*47	47	48	16	2^4
2^5*191	191	192	64	2^6
2^6*383	383	384	128	2^7

ここで, $Q = 3*2^f-1$: 乗数 3 のメルセンヌ素数.

表 9: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(h-2), h=5$

a	素因数分解	q^*	素因数分解	\$ N_1
38	$2*19$	19	19	2^2
632	2^3*79	79	79	2^4
7605	3^2*5*13^2	1169	$7*167$	$2*3^2*13$
24236	$2^2*73*83$	6199	6199	2^3*5*31
26108	$2^2*61*107$	6679	6679	2^3*167
129068	$2^2*41*787$	33079	$19*1741$	2^3*827
163712	2^7*1279	1279	1279	2^8
277688	$2^3*103*337$	35119	$7*29*173$	2^4*439
1080328	$2^3*83*1627$	136719	$3^2*11*1381$	2^4*1709
2620928	2^9*5119	5119	5119	2^10

$h=5, m=0$ の場合
A 型解 $2^e Q$ について, $Q+1, (Q+1)/5$ を求めて数表を作った.
$Q = 5*2^f - 1$:素数が確認される

表 10: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), m=0, h=5$

a	素因数分解			
2^e*a	a	$a+1$	$(a+1)/5$	
$2*19$	19	20	4	2^2
2^3*79	79	80	16	2^4
2^7*1279	1279	1280	256	2^8

$h=7, m=0$ の場合
A 型解 $2^e Q$ について, $Q+1, (Q+1)/7$ を求めて数表を作った.
$Q = 7*2^f - 1$ が確認される

表 11: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), m=0, h=7$

2^e*a	a	$a+1$	$(a+1)/7$	
2^4*223	223	224	32	2^5
2^8*3583	3583	3584	512	2^9

表 12: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), h=7$

a	素因数分解	q^*	素因数分解	\$ N_1
3568	2^4*223	223	223	2^5
917248	2^8*3583	3583	3583	2^9

4.1 C 型解

表 13: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), h=3$

a	q			N_1
$m=1$	1			
2	2	0	0	0
4	2^2	0	0	0
8	2^3	0	0	0
16	2^4	0	0	0
32	2^5	0	0	0
64	2^6	0	0	0
128	2^7	0	0	0
256	2^8	0	0	0
512	2^9	0	0	0

$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)+2\alpha(h-2)=-m$ の解に 2^e があるとする. $R=2^{e+1}$ とおくと,
$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)+2\alpha(h-2)=R-1+(1-h)R+(h-2)R=-1=-m$ なので, $m=1$.

$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)+2\alpha(h-2)=-1$ の解としてすべての 2^e がある.

これはいつでも正しいことが分かった.

$\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)+2\alpha(h-2)=\sigma(\alpha)+4\varphi(\alpha)-4\alpha+h(-4\varphi(\alpha)+2\alpha$

において $\alpha=2^e, R=2^{e+1}$ とおくと

$$\sigma(\alpha)+4\varphi(\alpha)-4\alpha=2R-1+2R-4R=-1, -4\varphi(\alpha)+2\alpha=0.$$

これは全く自明の事柄であった.

問題 1 $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)+2\alpha(h-2)=-1$ の解として 2^e だけか?.

これは概完全数問題の 1 種とみることができる. 解けそうもない難問である.

表 14: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), h=3$

$m=-6$	$-2*3$			
a		q		N_1
10	$2*5$	5	5	2^2
68	2^2*17	17	17	2^3
328	2^3*41	41	41	2^4
1424	2^4*89	89	89	2^5
97408	2^7*761	761	761	2^8
495	3^2*5*11	83	83	$2*3*5$
561795	$3*5*13*43*67$	177419	$11*127^2$	$2*3*9857$
$m=-4$	-2^2			
14	$2*7$	7	7	2^2
76	2^2*19	19	19	2^3
344	2^3*43	43	43	2^4
24256	2^6*379	379	379	2^7
391936	2^8*1531	1531	1531	2^9
1742	$2*13*67$	943	$23*41$	2^2*79
12644	$2^2*29*109$	3283	7^2*67	2^3*137

表 15: $\sigma(\alpha)+4(1-h)\varphi(\alpha)=2\alpha(h-2), h=3$

a		q		N_1
$m=-3$	-3			
242	$2*11^2$	128	2^7	2^2*11
$m=0$	0			
22	$2*11$	11	11	2^2
92	2^2*23	23	23	2^3
376	2^3*47	47	47	2^4
6112	2^5*191	191	191	2^6
24512	2^6*383	383	383	2^7

4.2　固有完全数 $k_0 = 22$

固有完全数 k_0 は $m = 0$ のときの完全数なので, $22 = 2 * 11, 4 * 23 = 92$ など.
最初の２つについて, 宇宙定数項を求め, 宇宙完全数を調べる.
固有完全数 $k_0 = 22$ に対して, 宇宙定数項 $D_0 = 116$.
$\sigma(\alpha) - 8\varphi(\alpha) + 2\alpha = D_0 = 116$ の解 α が宇宙完全数.
$\alpha = 2 * 11 * p$ となるのが通常解である.
このとき q^* の素因数分解は様々の形があるのだが, ここでは $q^* = 3Q, (Q:$ 素数$)$ となる場合を扱う.
$\alpha = 2 * 11 * p$ を用いて

$$N_1 = 2\alpha - 4\varphi(\alpha) = 44p - 4(10(p-1)) = 4(p+10) = 4R$$

$q^* = hN +_1 -1 + m = 12R - 117 = 3(4R - 39) = 3Q$ により $Q = 4R - 39 = 4(p+10) - 39 = 4p + 1$. $(p, Q = 4p+1)$ は超双子素数.
さらに $N_1 = 4R, (R:$ 素数$)$ を仮定すると, $Q = 4R - 39 = 4p + 1, R = p + 10$ が成り立つ.
すなわち, $(p, Q = 4p+1, R = p+10)$ はウルトラ三つ子素数になる.
禁断の完全数の, 宇宙完全数において, 超双子素数やウルトラ三つ子素数が極めて自然な形で登場してくる.
これは不思議な感動に包まれるような話である.

表 16: $\sigma(\alpha) - 8\varphi(\alpha) + 2\alpha = D_0 = 116$ (禁断の完全数の宇宙完全数) の解

$\alpha = 2 * 11 * p$	素因数分解	$q^* = 3Q$	素因数分解	$N1 = 4R$	p	R	Q
66	2*11*3	39	3*13	$2^2 * 13$	3	13	13
154	2*11*7	87	3*29	$2^2 * 17$	7	17	29
286	2*11*13	159	3*53	$2^2 * 23$	13	23	53
814	2*11*37	447	3*149	$2^2 * 47$	37	47	149
946	2*11*43	519	3*173	$2^2 * 53$	43	53	173
1606	2*11*73	879	3*293	$2^2 * 83$	73	83	293
1738	2*11*79	951	3*317	$2^2 * 89$	79	89	317
2134	2*11*97	1167	3*389	$2^2 * 107$	97	107	389
2794	2*11*127	1527	3*509	$2^2 * 137$	127	137	509
3058	2*11*139	1671	3*557	$2^2 * 149$	139	149	557
3586	2*11*163	1959	3*653	$2^2 * 173$	163	173	653
6754	2*11*307	3687	3*1229	$2^2 * 317$	307	317	1229
8206	2*11*373	4479	3*1493	$2^2 * 383$	373	383	1493
8998	2*11*409	4911	3*1637	$2^2 * 419$	409	419	1637
9526	2*11*433	5199	3*1733	$2^2 * 443$	433	443	1733

4.3 固有完全数 $k_0 = 4 * 23$

固有完全数 $k_0 = 4 * 23$ に対して, 宇宙定数項 $D_0 = 520$.
$\sigma(\alpha) - 8\varphi(\alpha) + 2\alpha = D_0 = 520$ の解 α が宇宙完全数.
固有完全数 $k_0 = 4 * 23$, 宇宙定数項 $D_0 = 520$

表 17: $\sigma(\alpha) - 8\varphi(\alpha) + 2\alpha = D_0 = 520$ の解

a	素因数分解
460	$2^2 * 5 * 23$
644	$2^2 * 7 * 23$
1012	$2^2 * 11 * 23$
1196	$2^2 * 13 * 23$
1564	$2^2 * 17 * 23$
1748	$2^2 * 19 * 23$
2668	$2^2 * 23 * 29$
中略	$--$
20102	$2 * 19 * 23^2$
20516	$2^2 * 23 * 223$

$2^2 * 23 * p$ が通常解であるが, たった 1 つだが天与の解 $a = 20102 = 2 * 19 * 23^2$ が発見できた.

4.4 $D_0 = 520$

次に, q^*, N_1 を求める.

$\alpha = 92p, (p:$ 素数$)$ のとき, q^* の素因数分解の型は種々あるがここではもっとも簡単な素数 Q の場合を調べる. さらに $N_1 = 8R, (R:$ 素数$)$ を仮定する.

$N_1 = 2\alpha - 4\varphi(\alpha) = 8(p+22) = 8R$ とすると, $R = p + 22$.

$Q = q^* = 3N_1 - 521 = 24(p+22) - 521 = 24p + 7, Q = 24p + 7$.

表 18: $\sigma(\alpha) + 4(1-h)\varphi(\alpha) = 2\alpha(h-2) + 520, h = 3$

$\alpha = 2^2 * 23 * p$	素因数分解	$q^* = Q = 24 * p + 7$		$N_1 = 8R$	R	p=R-22
1748	$2^2 * 23 * 19$	463	463	$2^3 * 41$	41	19
2852	$2^2 * 23 * 31$	751	751	$2^3 * 53$	53	31
5612	$2^2 * 23 * 61$	1471	1471	$2^3 * 83$	83	61
13892	$2^2 * 23 * 151$	3631	3631	$2^3 * 173$	173	151
21068	$2^2 * 23 * 229$	5503	5503	$2^3 * 251$	251	229
34868	$2^2 * 23 * 379$	9103	9103	$2^3 * 401$	401	379
38732	$2^2 * 23 * 421$	10111	10111	$2^3 * 443$	443	421
52532	$2^2 * 23 * 571$	13711	13711	$2^3 * 593$	593	571
84548	$2^2 * 23 * 919$	22063	22063	$2^3 * 941$	941	919
92828	$2^2 * 23 * 1009$	24223	24223	$2^3 * 1031$	1031	1009
95588	$2^2 * 23 * 1039$	24943	24943	$2^3 * 1061$	1061	1039
103868	$2^2 * 23 * 1129$	27103	27103	$2^3 * 1151$	1151	1129
107732	$2^2 * 23 * 1171$	28111	28111	$2^3 * 1193$	1193	1171
117668	$2^2 * 23 * 1279$	30703	30703	$2^3 * 1301$	1301	1279
131468	$2^2 * 23 * 1429$	34303	34303	$2^3 * 1451$	1451	1429
134228	$2^2 * 23 * 1459$	35023	35023	$2^3 * 1481$	1481	1459
135332	$2^2 * 23 * 1471$	35311	35311	$2^3 * 1493$	1493	1471
164588	$2^2 * 23 * 1789$	42943	42943	$2^3 * 1811$	1811	1789
179492	$2^2 * 23 * 1951$	46831	46831	$2^3 * 1973$	1973	1951

$Q = 24 * p + 7$ を満たす. $(p, Q = 24p + 7, R = p + 22)$ はウルトラ三つ子素数.

表 19: $(p, Q = 24p + 7)$ は超双子素数

p	$Q = 24p + 7$	$R = p + 22$	prime
3	79	25	x
5	127	27	x
11	271	33	x
19	463	41	
31	751	53	
41	991	63	x
43	1039	65	x
53	1279	75	x
59	1423	81	
61	1471	83	
73	1759	95	x
83	1999	105	x
89	2143	111	x
113	2719	135	x
139	3343	161	x
149	3583	171	x
151	3631	173	
163	3919	185	x
173	4159	195	x
191	4591	213	x
193	4639	215	x
199	4783	221	x