

# 高校生の定義した新しい完全数

飯高 茂

平成 29 年 5 月 10 日

高校生の定義した新しい完全数

## 1 桐山君と完全数

高専生 (高校生) 桐山君 (津山工業高等専門学校 電気電子工学科 2 年) は単独で独自に行っていた整数の研究において新しい完全数を定義しその性質を調べた. 高校生のオリジナルな研究である. これが衝撃でなくて何だろう. 以下, 彼の研究の要点を説明する.

### 1.1 完全数入門

初めてこのような研究に接する高校生読者も多いと思われる. そこで完全数の関連事項をまず説明する.

$2^e$  の約数は  $1, 2, 4, \dots, 2^e$  である. その和が素数  $p$  になるとき,  $a = 2^e p$  をユークリッドの完全数という.

一般に整数  $a$  に対してその約数の和を  $\sigma(a)$  (英語では divisor function, 約数関数; ユークリッド関数ともいう) で表す. したがって  $\sigma(2^e)$  は  $p$  になる. 素数  $q$  の約数は  $1$  と  $q$  なので  $\sigma(q) = q + 1$  を満たす. そしてこの性質は素数を特徴づける.

等比数列の和の公式によれば  $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$  になる. よって,  $p = 2^{e+1} - 1$ .

ここで  $a, b$  が互いに素なとき  $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$  を満たすことに注意する (これを  $\sigma(a)$  の乗法性という).

$p = 2^{e+1} - 1$  が素数 (メルセンヌ素数という) のとき  $a = 2^e p$  とおくと

$$\sigma(a) = \sigma(2^e p) = \sigma(2^e)\sigma(p) = (2^{e+1} - 1)(p + 1).$$

これを次のように変形する.

$$\begin{aligned}(2^{e+1} - 1)(p + 1) &= (2^{e+1} - 1)p + 2^{e+1} - 1 \\ &= 2^{e+1}p - p + 2^{e+1} - 1 \\ &= 2a - p + 2^{e+1} - 1.\end{aligned}$$

$\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$  は  $p$  になるので  $2a - p + 2^{e+1} - 1 = 2a$ . よって  $\sigma(a) = 2a$  を満たす.

驚いたことに BC300 年頃活躍した数学者ユークリッドはすでにこのような結果をえていた.

一般に  $\sigma(a) = 2a$  を満たす正の整数  $a$  を完全数 (perfect numbers) という. したがってユークリッドの完全数は完全数になる.

完全数という名前が美しく印象的であり, そのために研究が加速されたこともあった.

古くからある数学の大難問は完全数はユークリッドの完全数に限るか, という問題である.

オイラーによって, 偶数の完全数はユークリッドの完全数になることが示された. 奇数完全数は存在しないと想像されているが 2400 年たっても証明ができる兆しすらない.

## 1.2 完全数の数表

最初得られた 4 つの完全数は 6(週 6 日働く), 28(2 月は 28 日), 496(仕組む, と覚える), 8128(やい, ニヤケルナ, と覚える) である. これら 4 つの数は, それぞれ, 1, 2, 3, 4 桁であり, 末尾の数は 6, 8, 6, 8 となっている.

5 番目の完全数 5 桁で末尾の数は 6 の番だ, とおもわれたが 1800 年もたってから発見された 5 番目の完全数は 33550336(三々五々輪耳六個と覚える). これは 8 桁で末尾の数は 6. 2015 年には, 49 番目の完全数が Curtis Cooper により発見された.

表 1: 完全数  $a$  の数表,  $p = 2^{e+1} - 1$ :メルセンヌ素数

$e \bmod 4$	$e$	$2^e * p$	$a$	$a \bmod 10$	$p \bmod 10$
1	1	$2 * 3$	6	6	3
2	2	$2^2 * 7$	28	8	7
0	4	$2^4 * 31$	496	6	1
2	6	$2^6 * 127$	8128	8	7
0	12	$2^{12} * 8191$	33550336 (1456 年)	6	1
0	16	$2^{16} * 131071$	8589869056 (Cataldi, 1588 年)	6	1
2	18	$2^{18} * 524287$	137438691328 (Cataldi, 1588 年)	8	7
2	30	$A$	$B$ (Euler, 1772 年)	8	7
0	60	$C$	$D$ (Pervushin, 1883 年)	6	1

$$A = 2^{30} * 2147483647, B = 2305843008139952128,$$

$$C = 2^{60} * 2305843009213693951,$$

$$D = 2658455991569831744654692615953842176.$$

$a > 10$  のとき次の結果が観察される. 証明は容易.

$$e \equiv 0 \pmod{4} \implies a \equiv 6 \pmod{10}, p \equiv 1 \pmod{10},$$

$$e \equiv 2 \pmod{4} \implies a \equiv 8 \pmod{10}, p \equiv 7 \pmod{10}.$$

ユークリッドの完全数の末尾1桁は6または8であり,完全数のもつ簡単だが美しい性質として古くから注目されてきた.

## 2 桐山君の考え

さて桐山君は2の代わりに素数 $P$ をとり $\sigma(P^e)$ が素数の場合を考え $q = \sigma(P^e)$ とおいた.

$\bar{P} = P - 1$ を使うと

$$\bar{P}\sigma(P^e) = P^{e+1} - 1.$$

そこで $a = P^e q$ とおくとき $\sigma(a) = \sigma(P^e)\sigma(q)$ に $\bar{P}$ をかけて,

$$\begin{aligned} \bar{P}\sigma(a) &= (P^{e+1} - 1)(q + 1) \\ &= P^{e+1}q + P^{e+1} - (q + 1) \\ &= Pa + P^{e+1} - 1 - q \\ &= Pa + (P - 2)q. \end{aligned}$$

かくて, $q = \sigma(P^e)$ により

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\sigma(P^e). \quad (1)$$

### 2.1 桐山の完全数

$e$ を $n$ に変える.与えられた $P$ と $n$ に対し式

$$(P - 1)\sigma(a) - Pa = (P - 2)\sigma(P^n)$$

を $a$ についての方程式とみなす.この解として出てくる数は完全数の一般化と考えられ興味深いと桐山君は考える.

(メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究,2016/12 桐山翔伍 ; 高校生科学技術チャレンジ 2016年12月で発表された).

ここではこの解を桐山の完全数ということにする.

$q = \sigma(P^n)$ が素数の時 $P^n q$ は究極の完全数(後で説明数する)である.

$(P - 1)\sigma(a) - Pa = (P - 2)\sigma(P^n)$ の解 $a$ を( $P^n q$ をシード(seed)とする)桐山の完全数という.

とくに $a = P^e Q$ ( $P, Q$ ともに素数)と書けるときこれを正規形の解という

## 2.2 究極の完全数

一般に素数  $P$  に対して  $Q = \sigma(P^n)$  が素数になるとき  $a = P^n Q$  を  $P$  を底とする正規形の究極の完全数という. 前項の結果により

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = P^{n+1} - q - 1 = \overline{P}q - q = (P - 2)q.$$

一般に  $\text{Maxp}(a)$  によって,  $a$  の最大素因子を表すことにする.

この記号を使うと

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a)$$

となり, この式を満たす  $a$  を (平行移動の無い) 究極の完全数 (Iitaka 2015) という.

実際,  $P = 2$  なら  $\sigma(a) - 2a = 0$  となりユークリッドの完全数の定義式になる.

桐山の完全数では  $(P - 2)\sigma(P^n)$  となっているところが究極の完全数の定義では  $(P - 2)\text{Maxp}(a)$  になっているだけで両者は類似した構造である.  $P = 2$  ならどちらも完全数の方程式になる.

## 3 究極の完全数の文献

私は大学を退職後, 高校生の数学研究の指導という未知のしかし魅力的な仕事に熱中している. そこで高校生にとって魅力のある完全数の一般化という主題のもとに研究し新しい結果は日本数学会の年会で発表している.

神田の本屋さんである書泉グランデの7階で年12回の講義を継続して行っている. その経緯をご存知の方は, 飯高の努力が実ってできた成果の1つが桐山の完全数なのだろうと思われるかもしれない. そうではない. 桐山君は自分で考え続け新しい完全数に至った. そして高専の松田修教授に話したところ, 「飯高先生も同じようなことをやっているよ」と言われて初めて私との接点が生まれた. その故に, 桐山君の完全数の発見は衝撃なのだ. そのうち小学生が「完全数よりいいものができた」と言ってくるかもしれない.

究極の完全数がいつ登場したのか調べてみた. 2015年の3月に明治大学で開催された日本数学会の年会での飯高の講演(究極の完全数とその平行移動)が初出らしい. そのときのアブストラクト(電子版)を一部修正して再録する.

$P$  を素数とし  $\sigma(P^e)$  が素数  $q$  のとき  $a = P^e q$  を底が  $P$  の究極の完全数と呼ぼう. このとき  $q = \frac{P^{e+1} - 1}{P}$  となる.

究極の完全数を整数  $m$  だけ平行移動する.

$q = \frac{P^{e+1} - 1}{P} + m$  は素数として  $a = P^e q$  を  $m$  だけ平行移動した底が  $P$  の(狭義の)完全数と呼ぶ.

さて

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

に注意し,  $q + 1 = \frac{P^{e+1} + P - 2}{P} + m$  を用いて次のように式変形する.

$$\begin{aligned}
\bar{P}\sigma(a) &= (P^{e+1} - 1)(q + 1) \\
&= \bar{P}(q - m)(q + 1) \\
&= \bar{P}q(q + 1) - \bar{P}m(q + 1) \\
&= \bar{P}q\left(\frac{P^{e+1} + P - 2}{\bar{P}} + m\right) - \bar{P}m(q + 1) \\
&= Pa + q(P - 2) - m\bar{P}.
\end{aligned}$$

これより次の方程式ができる.

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\bar{P}. \quad (2)$$

この解を  $m$  だけ平行移動した底が  $P$  の広義の究極の完全数と呼ぶ.

広義の究極の完全数は素数  $q = \frac{P^{e+1}-1}{P} + m$  を基にして  $a = P^e q$  と書けるか? という問題を究極の完全数の基本問題という.

これが一般に成立するはずはなく反例を探しその意味を考えることになる.

### 3.1 桐山の完全数, 計算

$P = 3, n = 2$  のとき  $\sigma(3^2) = 1 + 3 + 3^2 = 13$  は素数なので  $3^2 * 13$  は究極の完全数. これをシードにする方程式

$$2\sigma(a) - 3a = 13$$

ができる. その解は (初めの 3 個は桐山君も同じ解を得ている)

表 2:  $[P = 3, n = 2]$  桐山完全数

$e$	$a$	素因数分解
2	117	$3^2 * 13$
3	1809	$3^3 * 67$
4	18549	$3^4 * 229$
7	14318289	$3^7 * 6547$

この解  $a = 1809 = 3^3 * 67$  と  $a = 18549 = 3^4 * 229$  は桐山の完全数だが, 究極の完全数ではない. 実際,  $\sigma(3^3) = \frac{3^4 - 1}{2} = 40$  となる.

$P = 5, n = 2$  のとき  $\sigma(5^2) = 31$  は素数なので究極の完全数.

$5^2 * 31$  をシードにすると方程式

$$4\sigma(a) - 5a = 31$$

ができる. その解は  $5^2 * 31$  以外にあるかが当面の課題になる.  $a < 10^6$  ではこの他の解はない.

### 3.2 $P = 3$ のときの究極の完全数

表 3:  $P = 3$  のときの究極の完全数

$e$	$a$	素因数分解
	4	$2^2$
2	117	$3^2 * 13$
6	796797	$3^6 * 1093$
	1212741	$3^2 * 47^2 * 61$

$117 = 3^2 * 13$  の他に  $796797 = 3^6 * 1093$  も究極の完全数で正規形の解である。  
完全数で正規形の解  $3^6 * 1093$  をシードにする方程式

$$2\sigma(a) - 3a = 1093$$

ができる。その解は  $3^6 * 1093$ 。この他の解は  $a < 10^6$  では存在しない。次号の後編ではさらに多くの解を見出すであろう。

### 3.3 種無し完全数

$P = 3, n = 4$  のとき  $\sigma(P^4) = 121 = 11^2$ 。これは素数ではないから  $3^4\sigma(3^4)$  は究極の完全数ではない。しかし方程式

$$2\sigma(a) - 3a = 121$$

ができてこれを満たす解は  $a = 147501 = 3^5 * 607$  のみしか発見できない。

これは何かをシードにしてできた方程式ではないがここから出てくる解も桐山の完全数である。これは種無し完全数と言ってもいいだろう。

## 4 $m$ だけ平行した広義の完全数

$m$  だけ平行した究極の完全数の方程式は

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\bar{P}$$

でありこれを満たす  $a$  を  $m$  だけ平行した広義の究極の完全数という。

この解が正規形になっているとは、 $a = P^f Q$ , ( $Q$ :素数) のかたちに表せることである。  
そこで  $a = P^f Q$  を代入すると、

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P^{f+1} - 1)(Q + 1) - P^{f+1}Q.$$

これより  $(P^{f+1} - 1)(Q + 1) - P^{f+1}Q = P^{f+1} - Q - 1$  によれば、

$$P^{f+1} - 1 = \bar{P}(Q - m).$$

これは  $\sigma(P^f) + m$  が素数  $Q$  のとき  $a = P^f Q$  が究極の (狭義の) 完全数になることを意味する.

究極の完全数のとき正規形の方が解を求めやすい. そこで桐山の完全数でも正規形の解を求めよう.

#### 4.1 桐山の完全数, 正規形の解

$a = P^e Q$  を桐山の完全数の方程式に代入すると,

$$(P - 2)\sigma(P^n) = (P - 1)\sigma(a) - Pa = (P^{e+1} - 1)(Q + 1) - P^{e+1}Q = P^{e+1} - 1 - Q,$$

なので正規形の解の方程式は

$$P^{e+1} - 1 - Q = (P - 2)\sigma(P^n)$$

になる. 整理して

$$Q = P^{e+1} - 1 - (P - 2)\sigma(P^n).$$

与えられた  $P, n$  に対し  $e < 50$  程度で  $e$  を動かして  $P^{e+1} - 1 - (P - 2)\sigma(P^n)$  が素数なるものを探しこれを  $Q$  として  $a = P^e Q$  を求めれば正規形の解ができる.

#### 4.2 桐山の完全数の例

正規形の解  $P^e Q$  の例を挙げる:

与えられた  $P, n$  に対し正規形の解  $a = P^e Q$  およびその素因数分解を表示している.

表 4:  $[P = 3, n = 2]$  桐山の完全数, 正規形

$e$	$a$	素因数分解
2	117	$3^2 * 13$
3	1809	$3^3 * 67$
4	18549	$3^4 * 229$
7	14318289	$3^7 * 6547$
16	5559059963901429	$3^{16} * 129140149$
18	450283900467110517	$3^{18} * 1162261453$
28	$A$	$B$

$$A = 1570042899081761336546165109$$

$$B = 3^{28} * 68630377364869$$

これだけデータがあれば  $a, Q$  について末尾 1 桁を求める次の結果を予測できよう.

$$e \equiv 2 \pmod{4} \implies a \equiv 7, Q \equiv 3 \pmod{10},$$

$$e \equiv 3 \pmod{4} \implies a \equiv 9, Q \equiv 7 \pmod{10},$$

$$e \equiv 0 \pmod{4} \implies a \equiv 9, Q \equiv 9 \pmod{10}.$$

ユークリッドの完全数の末尾1桁は6または8であったが桐山の完全数は末尾の数が1だけ増えた7または9になっている。これはかわいい結果と言ってよいだろう。

次にこの結果を証明する。

1)  $e = 4K + 1$  のとき

法5で考える。  $Q = 3^{4K+2} - 14 \equiv 9 - 14 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$ . この場合は起きない。

2)

$e = 4K + 2$  のとき:  $Q = 3^{4K+3} - 14 \equiv 27 - 14 = 13 \equiv 3 \pmod{5}$ .

$Q$  は奇数なので  $Q \equiv 3 \pmod{10}$ .

$a = 3^e Q \equiv 2 \pmod{5}$  かつ  $a$  は奇数なので  $a \equiv 7 \pmod{10}$ .

3)

$e = 4K + 3$  のとき:  $Q = 3^{4K+4} - 14 \equiv 1 - 14 = -13 \equiv 2 \pmod{5}$ .

$Q$  は奇数なので  $Q \equiv 7 \pmod{10}$ .

$a = 3^e Q \equiv 54 = 55 - 1 \equiv 4 \pmod{5}$ .  $a$  は奇数なので  $a \equiv 9 \pmod{10}$ .

4)

$e = 4K$  のとき:

$$Q = 3^{4K+1} - 14 \equiv 3 - 14 = -11 \equiv 4 \pmod{5}$$

$Q$  は奇数なので  $Q \equiv 9 \pmod{10}$ .

$$a = 3^e Q \equiv 4 \pmod{5}$$

$a$  は奇数なので  $a \equiv 9 \pmod{10}$ .



## 5 $P = 3, n = 4$ のときの正規形の解

$P = 3, n = 4$  のとき正規形の解である完全数  $a$  を求めた計算結果は次のとおり.

表 5:  $[P = 3, n = 4]$  完全数, 正規形

$e$	$a$	素因数分解
5	147501	$3^5 * 607$
15	617671645717293	$3^{15} * 43046599$
31	1144561273430762138731603054893	$3^{31} * 1853020188851719$
40	443426488243037768465014444614204579081	$3^{40} * 36472996377170786281$
41	3990838394187339925084541117557513094061	$3^{41} * 109418989131512359087$
47	$A$	$B$

$$A = 2120895147045314119488365752161051928228962093$$

$$B = 3^{47} * 79766443076872509863239$$

前編でも  $P = 3, n = 4$  のときの解を計算機による全数調査で調べたが解は  $a = 147501 = 3^5 * 607$  しかでなかった. 今回は解を正規形に探索したので能率よく多くの解がでてきた. その結果  $a, Q$  についてその末尾 1 桁を求める研究が可能になった.

この表によると次の結果が推測できる.

$$e \equiv 0 \pmod{4} \implies a \equiv 1 \pmod{10}; Q \equiv 1 \pmod{10}$$

$$e \equiv 1 \pmod{4} \implies a \equiv 1 \pmod{10}; Q \equiv 7 \pmod{10}$$

$$e \equiv 3 \pmod{4} \implies a \equiv 3 \pmod{10}; Q \equiv 9 \pmod{10}$$

これを次に証明する.

$2\sigma(a) - 3a = \sigma(3^4) = 121$  (素数ではないから, 種無しの場合) なので  $3^{e+1} - 122$  が素数  $Q$  になる  $e$  のあるとき  $3^e Q$  は桐山の完全数になる.

1)  $e \equiv 2 \pmod{4}$  のとき  $Q$  は 5 の倍数.

Proof.

$$e = 4K + 2 \text{ なので } 3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{5} \text{ に注目して}$$

$$Q = 3^{e+1} - 122 = 3^{4K+3} - 122 \equiv 27 - 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

$Q$  は素数ではないので起きない.

2)  $e \equiv 0 \pmod{4}$  のとき.

$$Q = 3^{e+1} - 122 = 3^{4K+1} - 122 \equiv 3 - 2 \equiv 1 \pmod{5}.$$

$a = 3^e Q \equiv 1 \pmod{5}$ . よって,  $Q \equiv 1, a \equiv 1 \pmod{10}$ .

3)  $e \equiv 1 \pmod{4}$  のとき.

$$Q = 3^{e+1} - 122 = 3^{4K+1} - 122 \equiv 9 - 2 = 7 \pmod{5}.$$

$a = 3^e Q \equiv 3 \times 2 \equiv 1 \pmod{5}$ . よって,  $Q \equiv 7, a \equiv 1 \pmod{10}$ .

4)  $e \equiv 3 \pmod{4}$  のとき.

$$Q = 3^{e+1} - 122 = 3^{4K+4} - 122 \equiv 1 - 2 \equiv 4 \pmod{5}.$$

よって,  $Q \equiv 9 \pmod{10}$ .  $a = 3^e Q \equiv 3 \times 9 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10}$ . よって,  $a \equiv 7 \pmod{10}$ .

### 5.1 $P = 3, n = 6$ のときの桐山の完全数, 正規形

$P = 3, n = 6$  のとき正規形の解である完全数  $a$  を求めた.

表 6: [ $P = 3, n = 6$ ] 桐山の完全数, 正規形

$e$	$a$	素因数分解
6	796797	$3^6 * 1093$
10	10395753597	$3^{10} * 176053$
16	5559013473442749	$3^{16} * 129139069$
24	239299328921639616679869	$3^{24} * 847288608349$

## 5.2 $P = 5, 7$ のときの桐山の完全数, 正規形

$a = 5^2 * 31$  をシードとする.

表 7: [ $P = 5, n = 2$ ] 桐山の完全数, 正規形

$e$	$a$	素因数分解
2	775	$5^2 * 31$
6	1219234375	$5^6 * 78031$
54	$A$	$B$

$A = 15407439555097886824447823540679418543086764969984869821928441524505615234375)$

$B = 5^{54} * 277555756156289135105907917022705078031$

表 8: [ $P = 7, n = 4$ ] 桐山の完全数

$e$	$a$	素因数分解
4	6725201	$7^4 * 2801$
5	1741927901	$7^5 * 103643$
21	2183814375991788776115939902278030301	$7^{21} * 3909821048582974043$

1 つしかないが次は正しいかも知れない. この結果の証明も読者に委ねる.

$$e \equiv 1 \pmod{4} \implies a \equiv 1 \pmod{100}; Q \equiv 43 \pmod{100}.$$

## 6 $m$ だけ平行移動した広義の究極の完全数

$m$  だけ平行移動した究極の完全数の方程式は

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

である. この解が正規形になっているとは,  $a = P^f Q$ , ( $Q$ :) 素数のかたちに表せることである.

$a = P^f Q$  を代入すると,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P^{f+1} - 1)(Q + 1) - P^{f+1}Q.$$

これより  $(P^{f+1} - 1)(Q + 1) - P^{f+1}Q = P^{f+1} - Q - 1$  によれば,

$$P^{f+1} - 1 = \overline{P}(Q - m).$$

これは  $\sigma(P^f) + m = Q$  が素数のとき  $a = P^f Q$  が究極の (狭義の) 完全数になることを意味する. 究極の完全数のとき正規形の解は求めやすい.

## 7 $m$ だけ平行移動した桐山の完全数

そこで桐山の完全数の場合も平行移動を考えてみたら, 思いのほかうまくいった.

$q = \sigma(P^e) + m$  ( $q$  は素数) と仮定する.

$a = P^e q$  とおくと  $\bar{P}(q - m) = P^{e+1} - 1$  および  $q - m = \sigma(P^e)$  なので

$$\begin{aligned}\bar{P}\sigma(a) &= (P^{e+1} - 1)(q + 1) \\ &= Pa + P^{e+1} - q - 1 \\ &= Pa - q + (q - m)\bar{P} \\ &= Pa - q + (q - m)(P - 2 + 1) \\ &= Pa + (q - m)(P - 2) - m \\ &= Pa - m + (P - 2)\sigma(P^e)\end{aligned}$$

ゆえに次の式ができるがこれを  $a$  についての方程式とみる.

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\sigma(P^n) - m.$$

この方程式の解を与えられた  $P, n, m$  に対し  $m$  だけ平行移動した桐山の完全数という.

### 7.1 $m$ だけ平行移動した桐山の完全数の計算例

表 9:  $[P = 3, n = 2, m = -2](a < 2 \times 10^6)$ ;  $m$  だけ平行移動した桐山の完全数

$e$	$a$	素因数分解
2	99	$3^2 * 11$
	147	$3 * 7^2$
4	18387	$3^4 * 227$
	100347	$3 * 13 * 31 * 83$
	145915	$5 * 7 * 11 * 379$

$a = 99 = 3^2 * 11$  と  $a = 18387 = 3^4 * 227$  は正規形の解.

さらに非正規形の解がいくつかでてきた.

$a = 147 = 3 * 7^2$  は尾の部分が持ち上がって 2 つに割れた twin tail (ウルトラマンの怪獣) を連想させる.

$a = 100347 = 3 * 13 * 31 * 83$  と  $a = 145915 = 5 * 7 * 11 * 379$  はオビの拡張形.

$m = 0$  の場合は非正規形の解は未発見.

ここで出てきた解はいろいろあってまことに興味深い.

$a = 153 = 3^2 * 17$ ,  $a = 1917 = 3^3 * 71$ ,  $a = 18873 = 3^4 * 233$ ,  $a = 174717 = 3^5 * 719$ .  
これらは正規形の解

表 10:  $[P = 3, n = 2, m = 4](a < 2 \times 10^6)$ ;  $m$  だけ平行移動した桐山の完全数

$e$	$a$	素因数分解
2	153	$3^2 * 17$
	957	$3 * 11 * 29$
3	1917	$3^3 * 71$
4	18873	$3^4 * 233$
	24957	$3^2 * 47 * 59$
	29637	$3^2 * 37 * 89$
	67077	$3^2 * 29 * 257$
	138237	$3 * 11 * 59 * 71$
5	174717	$3^5 * 719$
	201597	$3 * 11 * 41 * 149$

$a = 957 = 3 * 11 * 29$ ,  $a = 24957 = 3^2 * 47 * 59$ ,  $a = 29637 = 3^2 * 37 * 89$ ,  $a = 67077 = 3^2 * 29 * 257$ . これらは  $3^e qr$  型の解

$a = 138237 = 3 * 11 * 59 * 71$ ,  $a = 201597 = 3 * 11 * 41 * 149$ . これらはオビの拡張形.

$[P = 3, n = 2, m = 10]$  のときの解も次のように興味深い.

表 11:  $[P = 3, n = 2, m = 10](a < 2 \times 10^6)$ ;  $m$  だけ平行移動した桐山の完全数

$e$	$a$	素因数分解
2	207	$3^2 * 23$
	1023	$3 * 11 * 31$
	2975	$5^2 * 7 * 17$
4	19359	$3^4 * 239$
	147455	$5 * 7 * 11 * 383$
	1207359	$3^3 * 97 * 461$
	5017599	$3^3 * 83 * 2239$

## 7.2 正規形の解

$a = P^e Q$  が正規形の解のとき

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P^{e+1} - 1)(Q + 1) - P^{e+1}Q = P^{e+1} - Q - 1$$

によって

$$P^{e+1} - Q - 1 = (P - 2)\sigma(P^n) - m.$$

$P^{e+1} - 1 - (P - 2)\sigma(P^n) + m$  が素数になるときこれを  $Q$  とおくと,  $a = P^e Q$  が解になる.

表 12: [ $P = 3, n = 2, m = -2$ ] 桐山完全数, 正規形の解

$e$	$a$	素因数分解
2	99	$3^2 * 11$
4	18387	$3^4 * 227$
10	10459408419	$3^{10} * 177131$
14	68630300837379	$3^{14} * 14348891$
50	$A$	$B$
68	$C$	$D$

$$A = 1546132562196033993109371902929060748464902242019$$

$$B = 3^{50} * 2153693963075557766310731$$

$$C = 232066203043628532565045340531178154842313139674585263977935775187$$

$$D = 3^{68} * 834385168331080533771857328695267$$

ここで簡単に観察すると,  $a$  の末尾 1 桁の数は 7,9 になるらしい.  
読者には証明を考えることをすすめる.

表 13:  $[P = 3, n = 2, m = 4]$  桐山の完全数, 正規形の解

$a$	素因数分解	
2	153	$3^2 * 17$
3	1917	$3^3 * 71$
4	18873	$3^4 * 233$
5	174717	$3^5 * 719$
7	14327037	$3^7 * 6551$
16	5559060136088313	$3^{16} * 129140153$
17	50031543807598077	$3^{17} * 387420479$
20	36472996342302942393	$3^{20} * 10460353193$
21	328256967289933545597	$3^{21} * 31381059599$
35	$A$	$B$
37	$C$	$D$

$$A = 7509466514979724303631264968260477$$

$$B = 3^{35} * 150094635296999111$$

$$C = 608266787713357704616844933708887677$$

$$D = 3^{37} * 1350851717672992079$$

観察すると,  $a$  の末尾 1 桁の数は 3, 7 になるらしい. 手ごろな練習問題として証明できるであろう.

### 7.3 第二正規形の解

$a = P^e r q$ , ( $P < r < q$ : 素数) が解のときこれを第二正規形の解という.  
定義式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\sigma(P^n) - m$$

において,  $a = P^e r q$  を代入すると

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P^{e+1} - 1)(r + 1)(q + 1) - P^{e+1} r q$$

$N = P^{e+1} - 1, A = (r + 1)(q + 1), B = r q, \Delta = r + q, A = B + \Delta + 1$  によって

$$(P^{e+1} - 1)(r + 1)(q + 1) - P^{e+1} r q = NA - (N + 1)B = N(\Delta + 1) - B.$$

$S = \sigma(P^n), \alpha = (P - 2)S$  を用いて  $N(\Delta + 1) - B = \alpha - m$ . それゆえ

$$N\Delta - B = \alpha - m - N.$$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$  とおくとき  $B_0 = (r - N)(q - N) = B - N\Delta + N^2$ .

$$B_0 = N^2 - (N\Delta - B) = N^2 - (\alpha - m - N) = N^2 + N - \alpha + m.$$

$D = N^2 + N - \alpha + m$  とおく.

与えられた  $e > 0$  に対して  $N = P^{e+1} - 1$  を求め,  $D$  を計算する.

$D$  を適時因数分解して  $r_0 q_0 = B_0 = D$  となる  $r_0, q_0$  について,  $r = r_0 + N, q = q_0 + N$  を求めこれらが素数になるなら  $a = P^e r q$  が第二正規形の形の解になる.



#### 7.4 $P = 3, n = 3, m = 4$ の場合

$$e = 2, N = 26, S = \sigma(P^n) = 13, \alpha = 13, D = 693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$D = 693$  の因子  $r_0 = 1, 3, 9, 7, 21$  なのでこれを順に調べる.

$$r_0 = 3, r = 29, q_0 = 231, q = 257a = 67077$$

$$r_0 = 21, r = 47, q_0 = 33, q = 59, a = 24957$$

$$r_0 = 11, r = 37, q_0 = 63, q = 89a = 29637$$

一般の場合もこめてエクセルで整理した結果を載せる.

表 14: 完全数  $a$  の数表,  $p = 2^{e+1} - 1$  :メルセンヌ素数

$e$	$N$	$D$	$r_0$	$r$		$q_0$	$q$		$a$	
2	26	693	1	27	no prime	693	719			$3 \cdot 7 \cdot 11$
2	26	693	3	29	prime	231	257		67077	
2	26	693	9	35	no prime	77	103			
2	26	693	7	33	no prime	99	125	no prime		
2	26	693	21	47	prime	33	59		24957	
2	26	693	11	37	prime	63	89		29637	
1	8	63	1	9	no prime	63	71			$7 \cdot 9$
1	8	63	7	15	prime	9	17		765	
1	8	63	1	9	no prime	63	71			
3	80	6471	1	81	no prime	6471	6551			$3^2 \cdot 719$
3	80	6471	3	83	prime	2157	2237		1611279	
3	80	6471	9	89	prime	719	799	no prime		
4	242	58797	1	243	prime	58797	59039	no prime		$3^2 \cdot 47 \cdot 139$
4	242	58797	3	245	no prime	19599	19841			
4	242	58797	9	251	prime	6533	6775	no prime		
4	242	58797	47	289	no prime	1251	1493			
4	242	58797	141	383	prime	417	659		5013117	
4	242	58797	423	665	no prime	139	381			

次は prolog による出力結果である.

```
alpha=13n=693[3,3,7,11]
```

```
67077 $a=3^2*29*257$
```

```
29637 $a=3^2*37*89$
```

```
24957 $a=3^2*47*59$
```

```
true.
```

```
2 ?- univ_nee1_kiri(1,3,2,4).
```

```
alpha=13n=63[3,3,7]
```

```
957 $a=3^1*11*29$
```

```
true.
```

```
3 ?- univ_nee1_kiri(3,3,2,4).
```

```
alpha=13n=6471[3,3,719]
```

```
5013117 $a=3^3*83*2237$
```

```
true.
```

```
4 ?- univ_nee1_kiri(4,3,2,4).
```

```
alpha=13n=58797[3,3,47,139]
```

```
20444157 $a=3^4*383*659$
```

```
true.
```

```
5 ?- univ_nee1_kiri(5,3,2,4).
```

```
alpha=13n=530703[3,3,58967]
```

```
true.
```