von Kochの定理について [改定版]

宇都宮 潔

2025年1月26日

この論考は, 同じくRiemann予想を仮定して成り立つ定理2(i)から, 定理1の(1)式が導かれることを報告するのが目的です. そのためにはガウス積分の方法を基本に据え, 主に素数定理についてのPintzの結果[LTP]から初等的な方法で導きます.[補正版では下線部の形に訂正]

定理1 (von Koch,1900) [WN2]

$\zeta(s)$のすべての複素零点が直線Re s=1/2に載っているという仮定の下に,

(1) $$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

定理2 (Littlewood, 1914) リーマン仮説の下で [LC][WN2]

(i) $$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\,\mathrm{logloglog}\ x\right),$$
$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)$$ が成り立つ.

(ii) $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$は, その符号を無限回変える.

また, 私の前論考[HP2] P11,12の補遺3,4から, 次式(2)が成り立つ.

命題1　$x > e^4$ (>55)のとき,

(2) $$\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u} < \Omega\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right) < \sqrt{x}\,\mathrm{loglog}\ x.$$

上記の3個の定理と命題を利用して, (3)式を示すことができる.

(3) $$\mathrm{li}(x) - \pi(x) < O(\sqrt{x}\log x)$$

定理2(i)を前提としているため, リーマン仮説の下で成り立つことになる.

まず, (2)の積分は, $I = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t}$ と同値である. 置換$t=\sqrt{u}$により,

$$I = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} = \int_4^x \frac{dt}{2\sqrt{u}\log\sqrt{u}} = \int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u} + o(1).$$

[注] 下端4→2による小さい誤差の li(4)−li(2)=1.92… を無視して議論を続ける.

対数積分$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$の記法を使うと, $\mathrm{Li}(\sqrt{x}) = \int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\log u}$である.

$$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\log t}+\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dt}{\log t}=I+J$$ と分け，更に2個目の積分Jを

$$J=\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dt}{\log t}=\int_2^x\frac{dt}{\log t}-\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\log t}=\mathrm{Li}(x)-\mathrm{Li}(\sqrt{x})$$ を，さらに

(4) $$J=(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))-(\mathrm{Li}(\sqrt{x})-\pi(\sqrt{x}))+(\pi(x)-\pi(\sqrt{x}))$$

と変形しておく.

すると，$\mathrm{Li}(x)=I+J$ から，次式(5)が導かれることを以下に示そう.

(5) $$\mathrm{Li}(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{loglog}\ x+O\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)+O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

まず，定理2(i)から，

$$|\pi(x)-\mathrm{li}(x)|=\Omega\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right),\ |\pi(\sqrt{x})-\mathrm{li}(\sqrt{x})|=\Omega\left(\sqrt[4]{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)$$

であるが，(ii)から(4)のはじめの2項の符号は，必ずしも一致しないが，

$$\Omega\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)+\Omega\left(\sqrt[4]{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)=\Omega\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)$$

であり，2個目の絶対値は1個目の絶対値に比べて小さく，無視して扱える.

さて，命題1の(2)式から，次式(6)の第1番目の等号が成り立ち,補遺1(1)から，第2番目の等号が成り立つ. 1個目の等号は，P4に別証明も与えた.

(6) $$\Omega\left(\sqrt{x}\frac{\mathrm{logloglog}\ x}{\log x}\right)=O(\sqrt{x}\,\mathrm{loglog}\ x)=O(\sqrt{x}\log x)$$

また,(4)の第3項目には，Pintzの結果 $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x-1}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\pi(x)-\pi(\sqrt{x})&=\frac{x}{\log x-1}-\frac{\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}-1}=\frac{x}{\log x-1}-\frac{2\sqrt{x}}{\log x-2}\\&=\frac{x}{\log x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\log x}\right)^n-\frac{2\sqrt{x}}{\log x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\log x}\right)^n\\&=\frac{\sqrt{x}}{\log x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}-2^{n+1}}{(\log x)^n}\end{aligned}$$

であるから，Pintzの結果から，(6)が示された.

(7) $x>2^{2n+2}$ のとき，$\pi(x)>\pi(\sqrt{x})$.

また，上の展開から，

$$\pi(x)=\frac{x}{\log x-1}+o(1)=O\left(\frac{x}{\log x}\right),\ \pi(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}}{\log x-2}+o(1)=O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right),$$

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})=O\left(\frac{x}{\log x}\right)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)=O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

さて，$\log x<\sqrt{x}$であるから，$1/\sqrt{x}<1/\log x$ から，

$$\sqrt{x}<\frac{x}{\log x}.$$

また，(7)式から，

(7) $$(\log x)\cdot\log(\log x)<\sqrt{x}$$

であるから，$\sqrt{x}\log(\log x)<\dfrac{x}{\log x}$が導かれ，結局，上の2式を併せて，

$$\sqrt{x}<\sqrt{x}\log(\log x)<\frac{x}{\log x}.$$

したがって，

$$-\frac{x}{\log x}<-\sqrt{x}\log(\log x)$$

であるから，最後の等号で，[HP2]補遺1の結果を再び用いて，

$$O\left(\frac{x}{\log x}\right)=O\left(\sqrt{x}\log(\log x)\right)=O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

次に，(4)のJの式から，$(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))-(\mathrm{Li}(\sqrt{x})-\pi(\sqrt{x}))=O\left(\sqrt{x}\log x\right)$が(5)*の計算を通じて，分かる. このポイントは上記の事柄にある.

$$(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))-(\mathrm{Li}(\sqrt{x})-\pi(\sqrt{x}))=-\sqrt{x}\log(\log x)-(\pi(x)-\pi(\sqrt{x}))$$

(5)* $$=O\left(\sqrt{x}\log(\log x)\right)+O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$=O\left(\sqrt{x}\log x\right)\qquad+O\left(\sqrt{x}\log x\right)=O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

最後に，Littlewoodの結果からは，

$$|\mathrm{Li}(x)-\pi(x)|=O\left(\sqrt{x}\frac{\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$

であるが，

(8) $$\frac{\log(\log(\log x))}{\log x} < \log(\log x)$$

より，$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| = O\left(\sqrt{x}\log(\log x)\right)$がしたがう.

最後に,2式(7)と(8)を示せば，(4),(5),(5)*から，(3)が導かれる.

【(7)の証明1】

(7) $$(\log x)\cdot\log(\log x) < \sqrt{x}$$

$t \geqq e$のとき，$f(t) = \sqrt{t} - (\log t)\cdot\log(\log t)\ (>0)$に対し，$t = e^x$と置換すれば，

$x \geqq 1$のとき，$f(x) = e^{x/2} - x\cdot\log x$.

$\log x < \sqrt{x}\ (x \geqq 1)$より，$f(x) = e^{x/2} - x\cdot\log x > e^{x/2} - x^{3/2} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - 3x^{1/2}\right) \overset{*}{>} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} - 3\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - 6\sqrt{x} + 2\right) = \frac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 - 7\right\} \geqq \frac{1}{2} > 0\quad (x \geqq 36).$$

ただし，*の不等号では，「$x>0$のとき，$e^{x/2} > 1 + x/2$」を使った.

$x \geqq 36$のとき，$y = g(x)$は単調増加.

$e^3 > 20$ より，

$$g(36) = e^{18} - 36\sqrt{36} > 20^6 - 216 > 0.$$

したがって，十分大きいxについて，$f(x) > g(x) > 0$.

すなわち，十分大きいxについて，(7)が成り立つ. □

【(7)の証明2】

(7)に直接,$x = e^{e^t}$を代入すれば，(7) ⇔ $e^t\cdot t < e^{e^t/2}$ …… (7.1)

$X = \dfrac{e^t}{2} > 0$ として，$e^{e^t/2} = e^X > 1 + X + \dfrac{1}{2}X^2 > \dfrac{1}{2}X^2 + X = 2X\left(\dfrac{X}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$.

他方，(7.1)の左辺$= e^t\cdot t = 2X\ln(2X)$.

2式の差をとったときの，$2X(>0)$以外の因数に対して，

$$\frac{X}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 - \ln X > \frac{X}{4} - \ln X - \frac{1}{2} > \frac{X}{4} - \sqrt{X} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(X - 4\sqrt{X} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{X} - 2\right)^2 - 6\right\} \geqq \frac{3}{4}\quad (X \geqq 25).$$

したがって，$t = \ln(2X) \geqq \ln 50 = 3.91\cdots$ に対して，(7.1)が成り立つ. □

【(8)の証明】

$$\frac{\log(\log(\log x))}{\log x} < \log(\log x) \tag{8}$$

$x = e^{e^{e^t}}$を(8)に直接代入すれば，(8) ⇔ $t < e^t \cdot e^{e^t}$ …… (8.1)

$t>0$に対して，$e^t>t$，$e^{e^t} > e^t$ であるから，$e^t \cdot e^{e^t} > t \cdot e^t$.

他方，$t>0$に対して，$e^t>1$であるから，2式から，$e^t \cdot e^{e^t} > t$.

即ち，(8.1)が成り立つ. □

[Supplement]

定理3 (Schmidt, 1903) (リーマン仮説の下で,)

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + o\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right)$$

は不可能である.

定理4 (Littlewood, 1914) (リーマン仮説の下で,)

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + o\left(\frac{x^{1/2}\log\log\log x}{\log x}\right)$$

は不可能である.[WN2]

[注] [LC]を要約した[川面]には助かった.リーマン仮説の下で，Stieltjes積分より，(s.1)を導き，

$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = \frac{\psi(x) - x}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) \tag{s.1}$$

積分の平均値の定理と超鳩ノ巣原理を使う. 最後に，$\log\log\log x < Cx^{1/2}$なる正定数Cが存在し，(s.2)の右辺の符号∓から，$\psi(y) - y$も∓の符号をもつことから定理2(ｉ)を示している.

$$\frac{\psi(y) - y}{x^{1/2}\log\log\log x} = \frac{\mp 2x^{1/2}\log N + O(x^{1/2})}{x^{1/2}\log\log\log x} = O\left(\mp\frac{2}{C}\right), \quad e^{-1/N}x < {}^{\exists}y < e^{1/N}x \tag{s.2}$$

[Reference]

[WN2]素数定理の進展・下，W・ナルキエヴィッチ/中嶋眞澄訳，丸善，2013

[HP2] 双子素数予想式の評価など[補正版2]，宇都宮潔

[LTP] Littelwoodの定理の初等的検証と双子素数定理・素数定理への適用 [補正版]，宇都宮潔

[川面] https://mathlog.info/articles/0d4OaIXtouVRZP3BVZxx，川面，Littlewoodの定理の証明

[LC] On the difference π(x)－li(x)，Lee Christine，the University of Manchester,2008

[MV] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan Multiplicative Number Theory I., Classical Theory Cambridge University Press 2006