数学講話の講義

比の一般化と射影幾何

飯高 茂

平成 17 年 4 月 28 日

その由来

数学講話は，学部の２年生が主な対象であるが，気楽に聞けるような数学の講義として設定された．簡単に言えば，話はわかりやすくて単位が取りやすいもの，というのがその精神である．学生からすれば，お得な講義のはずである．また講話という題なので毎年任意に話題を選べるのも利点である．しかし，他の必修科目とのバランスを考えると何でもいいというわけにはいかず，私が担当するときは射影幾何の入門として射影２次曲線論を軸に講義している．

理系の１年生は線形代数と微分積分の内容をほぼ理解しなくてはいけない．私は２０年にわたって毎年欠かさず線形代数の講義をしてきた．線形代数なら簡単だからすぐ分かってくれるだろうと最初は考えたがこれは思い違いであった．線形代数のごとくわかりやすいものが学生にとってなぜかくも理解困難なのか，これを理解し対策をねることが線形代数教師のすべきことの１つである．

そこで線形代数の応用として射影幾何を講義し線形代数の理解を深めることをねらっている．そのうえ，無限遠点を扱うことによって数学における理想的要素という考えになれることができて、虚数の表す点にもなじんでくれば代数多様体や複素多様体に親しむ素地ができると期待される．いいことばかりである．

この講義では学生諸君が数学に対して疎外感をもつことなく，数学と一体感をもって欲しい願っている．私は講義中に出した問題を学生が解いたり，また板書の間違いを指摘してくれたら出席票に判子を押すことにし，判子の数を期末評価に加えると言ってある．漫然と板書を写していないで考えてノートを取れば，板書の書き違いに気づくことがあろう．それを指摘すれば，１つにつき１点とれる．このシステムをとって以来，講義を聴く態度がずいぶん能動的になり，活発になった．静かな講義風景から，観客も参加する演劇空間へと変化してきた．

無限遠点の導入

今日から射影幾何の入門をします．射影幾何では無限に遠い点を扱います．無限に遠い点を簡単に無限遠点といいますが，聞いたことがありますか.

君たちは，２年生になっていると思いますが，１年生の必須単位をいくつか落としていると，２年生になれていない可能性があります．線形代数１の３単位，線形代数２の６単位を落としていると２年生になれていないかもしれません．４年間で卒業することが無限に遠い点での出来事に感じられ，本当に留年してしまうことになりかねませんね.

学生：留年，留年と言って脅かさないでください.

君はきちんと出席しているから，まあ大丈夫じゃないですか．出てこない人が問題だなあ．無限大は知っているよね．富士通のマークにあるあれです．それはともかく，１を０で割ると ∞（無限大）になります．これは古代インド人の知っていたことなのです.

「０は古代インド人が発見した」という話を聞いたことがあるでしょう．ところで「０の発見」と言った場合その内容は何でしょうか．０とは何でまた何であるべきでしょうか.

「任意の数 a に対して $a + 0 = a$ をみたすものが０である」と言ってよく，これが０の定義です．このことから $a \times 0 = 0$ が証明できます．だから，足し算での０の性質は定義，かけ算での０の性質は定理になります．円周率 π は直径が１の円周長として

定義され，円の面積公式 πr^2 は定理になることと似ていますね．

数学の歴史で，０の発見はもっとも大切なことの１つですが，位取り記数法において，例えば９０９を示すときに０にあたるところに黒丸をおく程度のことでは０が発見されたとはいえないのです．「$1 \div 0 =$ 無限大」であることの認識があってはじめて０の概念が確立されたといえます．古代インドの数学はそのレベルに到達していたそうです．

学生：1 を０では割れないのでしょう．

私：０では割れない理由を言ってみて．

学生：だって，そう教えられてきたから．

私：それでは，不十分ですね．１を０で割れない理由を考えてみましょう．こういうときは背理法で考えるのがいいのです．

１を０で割ったら数になったと仮定しそれを ∞ と書いてみます．だから $\infty = \frac{1}{0}$．これより $0 \times \infty = 0 \times \frac{1}{0} = 1$．（０で約した.）さて ∞ が数なら計算規則が使えるはずです．次の式は，両辺が０だから当然正しい．

$$1 \times 0 = 2 \times 0$$

これに ∞ をかけてから結合法則を使いますと

$$左辺 = 1 \times (0 \times \infty) = 1 \times 1 = 1,$$

$$右辺 = 2 \times (0 \times \infty) = 2 \times 1 = 2.$$

したがって，$1 = 2$.

こうして矛盾した式が出ました．∞ を数としたから矛盾したのです．だから ∞ は数ではないのです．

しかし，∞ は（集合の）元とだけ考えて，数のような計算はできないものとすれば，別に矛盾が出ることもなくそれなりに役にたつものなのです．

学生：だけど，０や１は本当にあるのですか．

私：こういう格言がありますよ．**何は無くても空集合**.

数学の世界では，空集合は確実に存在すると思われているんですね．空集合をもとにして，１，２，３などの自然数を構成する理論があります．空集合 $\emptyset$ を発見した数学者カントルは偉いですね．１年生のとき実数の定義のところでデデキンドの切断を習ったでしょう．デデキンドはカントルより年齢が上でしたが２人はとても親しい間柄だったんだ．２人ともドイツの数学者だすが，学者としては不遇だったそうです．昔のことだから同じドイツでもなかなかあうことができず，カントルの新婚旅行のときようやくデデキンドにあえたそうです．そこでデデキンドはカントルを励ましたんだ．１９世紀の大数学者ランダウは整数論の本（大部で有名）を書き終え校正刷りがでたとき，彼の助手に校正刷りをすべて押しつけて「全部やってくれ」と言ったそうです．その助手はちょうど新婚旅行の列車に乗るときだったそうです．新婚旅行が意外にも数学に貢献したのですね．

さて無限遠点の定義と存在の話しをします．そのために比について復習しましょう．

比と分数

比の値 を知っていますか？ 聞いたことがあるでしょうね．定義を言えますか？ だれも知らない？比の値というのは実に不思議なものです．小学校の算数で比の値を習いますがその後，２度とでてきません．現在の教育課程では比の値は削除されています．

算数において，比 $a : b$ の値とは分数 $\frac{a}{b}$ のことです．そして $a : b = \frac{a}{b}$ と書くのです．

$a : b = \frac{a}{b}$ ですから，左辺の比と右辺の分数は同じものと言ってよいでしょうか．

こう言って問いかけると分からなくなりますが，比の値をわざわざ導入する意味は，$\frac{a}{b}$ が同じなら比が等しいというためです．ここに算数の極意があるのです．比と分数についての私の解釈は次の通りです．

$b \neq 0$ のとき $a : b$ を分数 $\frac{a}{b}$ の形で書き，$a : b$ の値といいます．だから分数は比の特別な場合です．しかし比については四則計算をしません．

たとえば $(1 : 2) + (1 : 3) = 5 : 6$ のような計算はしないのが慣例です．

一方，分数で表せない比があります．

$b = 0$ のとき $a \neq 0$ であって $a : 0 = 1 : 0$ になりますが，これを無限大 ∞ と考えるのです．

整数の比の全体は有理数全体に無限大が付加されたものです．さらに実数の比の全体は，実数全体に無限大が付加されたものになります．実数全体は数直線になりますので，数直線に無限大が付け加えられたものが実射影直線なのです．気持ちの上では数直線をまとめて考え１点をつけて円のようにみたも

のが実射影直線です．さらに，複素数の比の全体は複素平面に無限大をつけたものになり，これを複素射影直線といいます．射影直線を調べることが，１次元の射影幾何になります．

85 **歳の学生**：（講義の後で）比と分数，また比の値のことが今日は本当によく分かりました．女学校などで３０年以上数学を教えたことがありますが，比と分数の関係をはっきりと教えてきませんでした．せっかくわかったのに、もう教えるところがないのは少し残念ですね．

複比と３連比

１次分数式を扱うとき無限遠点が大切になります。１次分数式についての不変性をもつ式として複比 (cross ratio) があり，これを理解できれば比の極意を究めることができると言ってもよいほど重要なものです．

複比とは比の比という意味で，４つの異なる数 z_1, z_2, z_3, z_4 に関して

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

で定義されます．複比は美しく簡明な性質を数多く持っていて，これを素材に多くの計算練習をすると比のエキスパートになれます。しかし先を急ぐことにしましょう．

３角形の辺の比が 3 : 4 : 5 のとき，その三角形は直角三角形になる，ということは良く知っていますね．これはピタゴラスの定理の逆を使っています．３平方の定理などといういい方は，日本でしか通用しません．国際的にはピタゴラスの定理といいます．

このようなときに使われる３つ以上の数についての比を連比といいます．これは比ですから，数 $k \neq 0$ を共通にかけても変わりません．たとえば

$$3 : 4 : 5 = 3k : 4k : 5k$$

この性質が連比の特質で，連比の定義であるといってもいいのです．ところで，連比とは何だと思いますか．分かる人はいますか．出席表でランダムにあてることにします「あ，安藤君，いますか．安藤君，連比とは何ですか？」

安藤：連比は連比ですよ．

私：そうこういう答えではダメです．判子はあげられない．

連比は数ではない．ベクトルでもない．関数でもないんです．いったい，これは何だろう．何となく，使っているけれど，定義がはっきりしないのですね．学校数学では，定義が明確でないけれど使っているものがあります．慣れてなんとなく使えるようになったけれど定義が分かっていない，というのが結構あります．たとえば、最大公約数は誰でも知っているけれど，聞いてみると定義が言えない人が結構いますね．

さて，これから３連比 $a : b : c$ の定義をします．３つの数の組み (a, b, c) をすべて考えます．ただし (0,0,0) は除外します．これら全体は集合になるのでこれを S とおきます．

$$S = \{(a, b, c) | a, b, c \text{ は数 } \} - \{(0, 0, 0)\}$$

S に次のような関係 $\sim$ を導入します．

$$(a, b, c) \sim (a_0, b_0, c_0) \iff$$

$$ka = a_0, kb = b_0, kc = c_0 (k \text{ はある数})$$

こうして定義された関係 $\sim$ は同値関係になります．同値関係になることを証明できた人には判子を押します．

さて (a, b, c) の定める同値類とは (a, b, c) と同値な元全体のつくる集合でしたね．これを簡単に $a : b : c$ と書いて**３連比**とよびます．

だから，３連比 $a : b : c$ とは実は数の３つ組の作る集合だったのです．

$$a : b : c = \{(a_0, b_0, c_0) | (a_0, b_0, c_0) \sim (a, b, c)\}$$

連比の定義には，同値関係で集合を作るという操作が必要なのですから，高校生にとって３連比の正体が謎だったのは当然ですね．

射影平面と射影化

さて、射影平面を考えることにしましょう。射影平面は普通の平面に無限遠点をたくさん付け加えたものですが，無限遠にあるものを無理にイメージす

るようなことはしない方がいいでしょう．式で考える方がわかりやすいと思います。

３連比全体を**射影平面**といいます．数としてを複素数を考えたとき，とくに複素射影平面といいます．

$a \neq 0$ のとき $a : b : c = 1 : \frac{b}{a} : \frac{c}{a}$ となり座標 $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ の点とみなすとこれが普通の座標平面の点になります．$0 : b : c$ は無限遠点とみなされます．

$b \neq 0$ なら $0 : b : c = 0 : 1 : \frac{c}{b}$ ですが，これを $\infty(\frac{c}{b})$ と書いてもいいのです． さらに $0 : 0 : c = 0 : 0 : 1$ を ∞' と書いてもいいですね．こう書けば無限遠点はたくさんあることがよく分かりますが，あまり使われない記号ですからもう使いません．

普通の n 次曲線は n 次式 $f(x, y)$ を用いて $f(x, y) = 0$ で定義されるので連比の変数 $x_0 : x_1 : x_2$ を $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ で導入し，x_0^n をかけてえられた

$$F(x_0, x_1, x_2) = f(x_1/x_0, x_2/x_0)x_0^n$$

を $f(x, y)$ の**射影化**といいます．$F(x_0, x_1, x_2)$ は各項がすべて n 次の単項式からなっていて斉次式とよぶことができます。

例えば直線の式 $f(x, y) = y - x$ の射影化は $F(x_0, x_1, x_2) = x_2 - x_1$ となりこれは１次の斉次式です．これから射影平面での直線 $x_2 - x_1 = 0$ が定義されます．

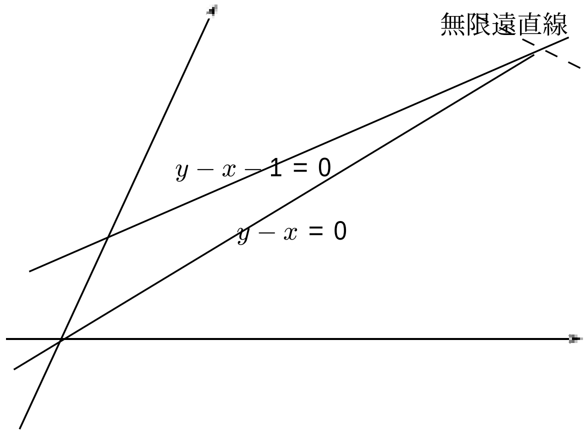
平行線

直線 $y - x - 1 = 0$ と $y - x = 0$ は平行です．

$y - x - 1 = 0$ の射影化が定義する直線は $x_2 - x_1 + x_0 = 0$ となります．射影平面でこれら２直線の交点を考えるために，方程式を連立して解きます．

$$x_2 - x_1 = 0, \quad x_2 - x_1 + x_0 = 0$$

すると $x_0 = 0, x_2 = x_1$ になるので，交点は $0 : 1 : 1$. これは無限遠点の１つです．平行線の射影化で得られた２直線は必ずある無限遠点で交わるのです．



一般に，１次式の零点 $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ は射影平面での直線を表します．射影平面での異なる２直線は

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \text{ と } \quad b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

で定義されますが，異なる２直線という条件は「２つのベクトル $\mathbf{u}_1 = {}^t\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = {}^t\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ が１次独立」と線形代数のことばで言いかえることができます．この２直線の交点 $x_0 : x_1 : x_2$ は連立方程式

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \quad b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

の解ですから，必ず $0 : 0 : 0$ 以外の解があります．その解は $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ のベクトル積 $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ の定数倍です．

射影平面では平行線は存在しません．普通の意味の平行線は必ず，どこかの無限遠点で交わるからです．これは，１次独立なベクトルのベクトル積は０にならないことからもわかります．

円の方程式

普通の座標では円の方程式はどうかけましたか．

学生：$x^2 + y^2 - r^2 = 0$ です．

それでもいいけれど，原点が０でないときも含めれば

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

と書けるとした方がよいでしょう．しかし，$a = b = 0, c = -1$ の場合は $x^2 + y^2 + 1 = 0$ になり実数の点が無くなります．これを虚円ということがあります．実数だけで見ると虚円は空集合になります．しかし，複素数の点も考えることにしておけば，虚円でも意味があります．円の射影化は

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + cx_0{}^2 = 0$$

になります．そこで，この上にある無限遠点を探すため，無限遠直線 $x_0 = 0$ との交点を求めましょう．連立方程式

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + cx_0{}^2 = 0, x_0 = 0$$

を解くと，$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 0$ になるので， $x_1 = \pm ix_2$．だから $0 : 1 : i$ と $0 : 1 : -i$ が２つの交点なのです．これをしばしば，I, J で表し，**虚円点**といいます．円は虚円点を通り，また２つの虚円点を通る２次曲線は円になることが証明できます．これはぜひやってみましょう．

２次曲線と接線，極と曲線の関係 については、スキップします。

角度と複比

射影平面では平行線はありません．また２点間の距離も定義できません．無限遠の点から原点までの距離は定義できないのです．また２直線には交点があるけれど，その交点での角度の概念もありません．２直線が常に交わるという具合の良い性質をえた代償として失うものもまた大きかったのです．

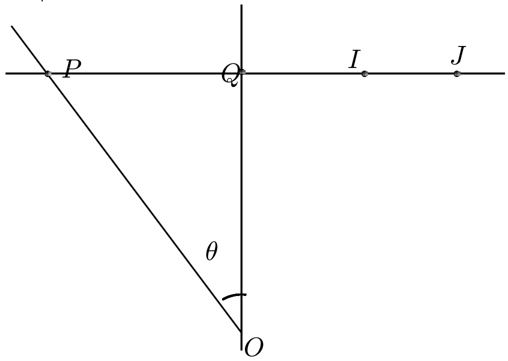
しかし，通常の世界では１点で交わる２直線があればそれには角度があります．その角度を射影平面の立場で見直してみましょう．簡単のため，２直線の方程式は

$$y = 0, y - \lambda x = 0$$

とします．そのとき λ は傾きで角度 θ とは $\lambda = \tan\theta$ の関係で結ばれていることは高校の数学 I で学んだとおりです．$y = 0$ と $y = \lambda x$ の射影化が無限遠点で交わる点を Q, P とおきます．これらはどうなるでしょう．これはやってください．時間は６分．出来た人には判子をおします．

学生：$Q = 0 : 1 : 0, P = 0 : 1 : \lambda$ になりました．

ＯＫですね．次に，４点 P, Q, I, J の複比 $[P, Q, I, J]$ を計算してください．複比の計算では，適当な座標についての複比で求められます．ここでは x_2/x_1 について計算します．だからどうなるかな．



$[\lambda, 0, i, -i]$ を求めればいいのです．

$z_1 = \lambda, z_2 = 0, z_3 = i, z_4 = -i$ について $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ でしたから

$$[P, Q, I, J] = [\lambda, 0, i, -i] = \frac{i - \lambda}{i + \lambda}$$

になります．さて，三角関数についてのオイラーの公式はよく知っているでしょう．それを使うと

$$\lambda = \tan\theta = -i\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}.$$

これを計算をすると

$$\frac{i - \lambda}{i + \lambda} = e^{2i\theta}$$

だから，まとめると

$$[P, Q, I, J] = e^{2i\theta}$$

すなわち複比 $[P, Q, I, J]$ の対数を $2i$ で割ると角度 θ が表れます．これは実に不思議な関係ですが，**ラゲルの関係**とよばれます．さて一般に原点を通る２直線

$$y = \lambda_1 x, \quad y = \lambda_2 x$$

の間の角度はどのように書けるでしょうか．複比で書けば $[P_2, P_1, I, J]$ と書けそうです．実際に,$z_1, z_2, z_3, \alpha, \beta$ を異なる数とするとき複比の連鎖関係式

$$[z_1, z_2, \alpha, \beta][z_2, z_1, \alpha, \beta] = 1$$

$$[z_1, z_2, \alpha, \beta][z_2, z_3, \alpha, \beta] = [z_1, z_3, \alpha, \beta]$$

を使えばすぐ証明できます．さあ連鎖関係式の証明をしてください。

（いいたか しげる）