フィボナッチ数列のさまざまな一般化とその性質について

黒田　美紀

平成 18 年 2 月 7 日

目 次

1　目的

1.1　フィボナッチ数列とルカ数列

フィボナッチ数列とは、$f_0 = 1, f_1 = 1$ を初期条件にし、$n > 1$ のとき
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ で一般項を定義した数列をフィボナッチ数列という。
$f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, f_6 = 13, f_7 = 21, \cdots$
となる。定義からプログラムは次のようにできる。

＊フィボナッチ数列＊

```
fib(0,1).
```

```
fib(1,1).
fib(N,F):-N>1,N1 is N1 is N-1,N2 is N1-1,
          fib(N1,F1),fib(N2,F2),
          F is F1 + F2.

fb(N,F):-N>0,fb_aux([N,F],1,1,0).
fb_aux([N,F],N,F,F1).
fb_aux(Const,N,F,F1):-N1 is N + 1,F0 is F + F1,
                  fb_aux(Const,N1,F0,F).
```

数列 $\{f_n\}$ を１つずつずらした数列をリストで表す。

$\{f_n\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \cdots]$　なので、

$\{f_{n+1}\} = [1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \cdots]$

$\{f_{n+2}\} = [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \cdots]$

$\{f_{n+3}\} = [3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \cdots]$

$\{f_{n+4}\} = [5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \cdots]$

$\{f_{n+5}\} = [8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \cdots]$

これらから次のような性質が見つかる。

（１）$f_n + f_{n+3} = 2f_{n+2}$

$$\begin{aligned}\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \cdots]\\ \{f_{n+3}\} &= [3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \cdots]\\ 2\{f_{n+2}\} &= 2 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \cdots]\end{aligned}$$

（２）$f_n + f_{n+4} = 3f_{n+2}$

$$\begin{aligned}\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \cdots]\\ \{f_{n+4}\} &= [5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \cdots]\\ 3\{f_{n+2}\} &= 3 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \cdots]\end{aligned}$$

ルカ数列とは $l_0 = 1, l_1 = 3$ を初期条件にし、$n > 1$ のとき
$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ で一般項を定義した数列をルカ数列という。
$l_2 = 3, l_3 = 4, l_4 = 7, l_5 = 11, l_6 = 18, _7 = 29, \cdots$
となる。定義からプログラムは次のようにできる。

＊ルカ数列＊

```
:- dynamic lk_l/2.
:- dynamic l/2.
l(2,3).
l(1,1).
lk_l(2,3):- !.
lk_l(1,1):- !.
lk_l(N,F):- N>2,N1 is N-1,N2 is N1-1,!,
           lk_l(N1,F1),lk_l(N2,F2),
           F is F1 + F2,!,
           asserta(l(N,F)),
           asserta((lk_l(N,F):- !)).
```

数列 $\{l_n\}$ を１つずつずらした数列をリストで表す。

$\{l_n\} = [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, \cdots]$ なので、

$\{l_{n+1}\} = [3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, \cdots]$

$\{l_{n+2}\} = [4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, \cdots]$

$\{l_{n+3}\} = [7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, \cdots]$

$\{l_{n+4}\} = [11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, \cdots]$

$\{l_{n+5}\} = [18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, \cdots]$

これらから次のような性質が見つかる。

（１）$l_n + l_{n+3} = 2l_{n+2}$

$$\begin{aligned}\{l_n\} &= [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, \cdots]\\ \{l_{n+3}\} &= [7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, \cdots]\\ 2\{l_{n+2}\} &= 2 \cdot [4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, \cdots]\end{aligned}$$

（２）$l_{n+3} - l_n = 2l_{n+1}$

$$\begin{aligned}\{l_{n+3}\} &= [7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778 \cdots]\\ \{l_n\} &= [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, , \cdots]\\ 2\{l_{n+1}\} &= 2 \cdot [3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, \cdots]\end{aligned}$$

また、フィボナッチ数列とルカ数列から次のような性質が見つかる。

（1）$f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$

$$\{f_n\} = [1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,\cdots]$$
$$\{f_{n+2}\} = [2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,\cdots]$$
$$\{l_{n+1}\} = [3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,2207,\cdots]$$

（2）$l_n + l_{n+2} = 5f_{n+1}$

$$\{l_n\} = [1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,\cdots]$$
$$\{l_{n+2}\} = [4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,2207,3571,\cdots]$$
$$5\{f_{n+1}\} = 5\cdot[1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,\cdots]$$

このことから、ある規則でできている数列から数学的な構造を考えてみる。

1.2 数列の規則

フィボナッチ数列を一般化した次のような数列を研究する。
あるところにコドモ、セイネン、オトナがいて次の規則でふえているとする。
①コドモは１年後、セイネンになる。
②セイネンは１年後、オトナになる。
③オトナは１年後、コドモとセイネンを生み、オトナは生き続ける。
１年目にはコドモが１、セイネンは０、オトナは０とする。
n 年後、コドモの数を a_n 、セイネンの数を b_n 、オトナの数を c_n 、コドモとセイネンとオトナの合計を k_n 、と表す。
$a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0,\ k_1 = 1$
つまり４年後はコドモは１、セイネンは１、オトナは１となり、
$a_4 = b_4 = c_4 = 1,\ k_4 = 3$ ということである。

これらの数列をリストで表すと次のようになる。

$\{a_n\} = [1,0,0,1,1,2,4,7,13,24,44,81,149,274,504,\cdots]$

$\{b_n\} = [0,1,0,1,2,3,6,11,20,37,68,125,230,423,778,\cdots]$

$\{c_n\} = [0,0,1,1,2,4,7,13,24,44,81,149,274,504,927,\cdots]$

$\{k_n\} = [1,1,1,3,5,9,17,31,57,105,193,355,653,1201,2209,\cdots]$
この数列はトリゴナッチ数列と呼ばれる。
＊ $\{k_n\}$ のプログラム＊

```
:- dynamic miki_m/2.
:- dynamic m/2.
```

```
m(4,3).
m(3,1).
m(2,1).
m(1,1).
miki_m(4,3):- !.
miki_m(3,1):- !.
miki_m(2,1):- !.
miki_m(1,1):- !.
miki_m(N,F):- N>4,N1 is N-1,N2 is N1-1,N3 is N2-1,N4 is N3-1,!,
              miki_m(N1,F1),miki_m(N2,F2),miki_m(N3,F3),miki_m(N4,F4),
              F is F1+F2+F3,!,
              asserta(m(N,F)),
              asserta((miki_m(N,F):- !)).
```

同様に $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ のプログラムもできる。

2　方法

数列をリストに表し項を１つずつずらしたリスト、それらをスカラー倍したリストを観察して、いろいろ試し、数列の性質を見つける。

数列 $\{k_n\}$ を１つずつずらした数列をリストで表す。

$\{k_n\}$ = [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, $\cdots$]　なので、

$\{k_{n+1}\}$ = [1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, $\cdots$]

$\{k_{n+2}\}$ = [1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, $\cdots$]

$\{k_{n+3}\}$ = [3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, $\cdots$]

$\{k_{n+4}\}$ = [5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, 25281, $\cdots$]

$\{k_{n+5}\}$ = [9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, 25281, 46499, $\cdots$]

数列 $\{k_n\}$ を２倍した数列をリストで表す。

$2\{k_n\}$ = [2, 2, 2, 6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, $\cdots$]

$2\{k_{n+1}\}$ = [2, 2, 6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, 8126, $\cdots$]

$2\{k_{n+2}\}$ = [2, 6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, 8126, 14946, $\cdots$]

$$2\{k_{n+3}\} = [6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, 8126, 14946, 27490, \cdots]$$

$$2\{k_{n+4}\} = [10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, 8126, 14946, 27490, 50562, \cdots]$$

$$2\{k_{n+5}\} = [18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, 1306, 2402, 4418, 8126, 14946, 27490, 50562, 92998, \cdots]$$

3　結果

3.1　数列の性質

この数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{k_n\}$ の間の関係を探した結果、次のような式を発見することができた。

（1）$k_n + k_{n+2} = 2b_{n+3}$

$$\begin{aligned}\{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots]\\ \{k_{n+2}\} &= [1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, \cdots]\\ 2\{b_{n+3}\} &= 2 \cdot [1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, 423, 778, 1431, 2632, 4841, \cdots]\end{aligned}$$

（2）$k_n + k_{n+4} = 2k_{n+3}$

$$\begin{aligned}\{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots]\\ \{k_{n+4}\} &= [5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, 25281, \cdots]\\ 2\{k_{n+3}\} &= 2 \cdot [3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, \cdots]\end{aligned}$$

（3）$k_{n+1} - k_n = 2c_n$

$$\begin{aligned}\{k_{n+1}\} &= [1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, \cdots]\\ \{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots]\\ 2\{c_n\} &= 2 \cdot [0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, \cdots]\end{aligned}$$

（4）$k_n + k_{n+1} = 2c_{n+2}$

$$\begin{aligned}\{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots]\\ \{k_{n+1}\} &= [1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, \cdots]\\ 2\{c_{n+2}\} &= 2 \cdot [1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, \cdots]\end{aligned}$$

（5）$k_{n+3} - k_n = 2c_{n+3}$

$$\begin{aligned}\{k_{n+3}\} &= [3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, \cdots]\\ \{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots]\\ 2\{c_{n+3}\} &= 2 \cdot [1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, \cdots]\end{aligned}$$

（6）$k_{n+4} - k_n = 4c_{n+2}$

$$\begin{aligned}
\{k_{n+4}\} &= [5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, 25281, \cdots] \\
\{k_n\} &= [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, \cdots] \\
4\{c_{n+2}\} &= 4 \cdot [1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, \cdots]
\end{aligned}$$

3.2　数列の関係式

数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ の関係は

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \phantom{a_n + b_n +{}} c_n \\
b_{n+1} &= a_n \phantom{{}+ b_n} + c_n \\
c_{n+1} &= \phantom{a_n +{}} b_n + c_n
\end{aligned}$$

と表せる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

と表せる。

3.3　３次行列のケーリー・ハミルトン

３次行列 M の場合についてのケーリー・ハミルトンの公式を考えてみる。

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

t を変数とするとき，多項式 $\varphi_M(t) = \det(tE - M)$ は行列 M の固有多項式である。

$$\begin{aligned}
\varphi_M(t) &= \det(tE - M) \\
&= \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & t - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & t - a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$\varphi_M(t) = t^3 - \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t - \alpha_0$

とおくと、

$\alpha_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\alpha_0 = \det(M)$

行列 M の対角成分の和 $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ は $Tr(M)$ と書く。これを用いると $\alpha_2 = \mathrm{Tr}(M)$ となる。$\varphi_M(t)$ において $t = 0$ とおくと $\alpha_0 = \det(M)$ を得る。

$\alpha_1 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}$ となる。

ケーリー・ハミルトンの定理より、$\varphi_M(M) = 0$

$M = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\varphi_A(t) &= t^3 - (0 + 0 + 1)\,t^2 \\
&\quad + ((0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 0) - (0 \cdot 1) - (1 \cdot 1) - (0 \cdot 1))\,t \\
&\quad - ((0 \cdot 0 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (0 \cdot 0 \cdot 1) - (1 \cdot 0 \cdot 0) - (1 \cdot 0 \cdot 1) - (0 \cdot 1 \cdot 1)) \\
&= t^3 - t^2 - t - 1
\end{aligned}$$

これより、ケーリー・ハミルトンの定理により、

$$\varphi_A(A) = A^3 - A^2 - A - E = 0$$

を満たす。さて、

$$\mathrm{u_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

とおくと、(*) により $\mathrm{u_{n+1}} = A\mathrm{u_n}$ が成り立っていることから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}_{n+1} &= A\mathrm{u}_n \\
&= A \cdot A\mathrm{u}_{n-1} \\
&= A^2\mathrm{u}_{n-1} \\
&= A^2 \cdot A\mathrm{u}_{n-2} \\
&= A^3\mathrm{u}_{n-2} \\
&= A^3 \cdot A\mathrm{u}_{n-3} \\
&\vdots \\
&= A^n \cdot A\mathrm{u}_{n-n} \\
&= A^n \cdot A\mathrm{u}_0 \\
&= A^n\mathrm{u}_1 \\
&= A^{n-3} \cdot A^3\mathrm{u}_1 \\
&= A^{n-3} \cdot (A^2 + A + E) \cdot \mathrm{u}_1 \\
&= A^{n-1} \cdot \mathrm{u}_1 + A^{n-2} \cdot \mathrm{u}_1 + A^{n-3} \cdot \mathrm{u}_1 \\
&= \mathrm{u}_n + \mathrm{u}_{n-1} + \mathrm{u}_{n-2}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\mathrm{u}_{n+1} = \mathrm{u}_n + \mathrm{u}_{n-1} + \mathrm{u}_{n-2}
$$

つまり、

$$
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{pmatrix}
$$

このベクトルの第１成分から $\{a_n\}$ についての 、また第２成分から $\{b_n\}$ についての、第３成分から $\{c_n\}$ についての４項間についての漸化式が得られる。

$$
a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}
$$

$$
b_{n+1} = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}
$$

$$
c_{n+1} = c_n + c_{n-1} + c_{n-2}
$$

このことより、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ は同じ漸化式を満たす。

4　考察

4.1　数列の空間

命題

一般に、数列 $\{a_n\}$ を元とするベクトル空間を考える。
p, q, r を定数とするとき

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$$

を満たす $\{a_n\}$ 全体は部分ベクトル空間 W となる。

注　$\{a_n\} \in W$ のとき $\{a_{n+1}\} \in W$ も成り立っている。

＜証明＞
ベクトル空間は和とスカラー倍で保たれることを示す。
（i）$\{a_n\}, \{b_n\} \in W \quad \Longrightarrow \quad \{a_n + b_n\} \in W$
（ii）$\{a_n\} \in W$ に対してスカラー k とする　$\Longrightarrow \quad \{ka_n\} \in W$

（i）の証明
$\{a_n\} \in W$ より、

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$$

$\{b_n\} \in W$ より、

$$b_{n+3} = pb_{n+2} + qb_{n+1} + rb_n$$

$$\begin{aligned}\{a_n + b_n\} &= pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n + pb_{n+2} + qb_{n+1} + rb_n \\ &= p(a_{n+2} + b_{n+2}) + q(a_{n+1} + b_{n+1}) + r(a_n + b_n)\end{aligned}$$

よって、

$$\{a_n + b_n\} \in W$$

（ii）の証明

$$\begin{aligned}k\{a_{n+3}\} &= k\{pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n\} \\ &= kpa_{n+2} + kqa_{n+1} + kra_n\end{aligned}$$

よって、

$$\{ka_{\mathrm{n}}\} \in W \qquad ¤$$

4.2　数列の性質の証明

数列 $\{a_{\mathrm{n}}\}\{b_{\mathrm{n}}\},\{c_{\mathrm{n}}\}$ について、３ 結果で述べた性質を証明する。
＜証明の方針＞
２つの数列が等しいことをいうには、
①両辺は同じ漸化式を満たす。
②最初の３つの値で両辺は等しい。
を満たせば、２つの数列が等しいことが証明される。

(１)$k_{\mathrm{n}} + k_{\mathrm{n+2}} = 2b_{\mathrm{n+3}}$ の証明
(ｉ)$n = 1$ のとき
$k_1 + k_3 = b_4$
1 + 1 = 2
(ii)$n = 2$ のとき
$k_2 + k_3 = 2b_5$
1 + 3 = 4
(iii)$n = 3$ のとき
$k_3 + k_5 = 2b_6$
1 + 5 = 6

(２)$k_{\mathrm{n}} + k_{\mathrm{n+4}} = 2k_{\mathrm{n+3}}$ の証明
(ｉ)$n = 1$ のとき
$k_1 + k_5 = 2k_4$
1 + 5 = 6
(ii)$n = 2$ のとき
$k_2 + k_6 = 2k_5$
1 + 9 = 10
(iii)$n = 3$ のとき
$k_3 + k_7 = 2k_6$
1 + 17 = 18

(３)$k_{\mathrm{n+1}} - k_{\mathrm{n}} = 2c_{\mathrm{n}}$ の証明
(ｉ)$n = 1$ のとき
$k_2 - k_1 = 2c_1$
1 - 1 = 0
(ii)$n = 2$ のとき
$k_3 - k_2 = 2c_2$

1 - 1 = 0

(iii)$n = 3$のとき

$k_4 - k_3$ = $2c_3$

3 - 1 = 2

(4)k_n + k_{n+1} = $2c_{n+2}$の証明

(i)$n = 1$のとき

k_1 + k_2 = $2c_3$

1 + 1 = 2

(ii)$n = 2$のとき

k_2 + k_3 = $2c_4$

1 + 1 = 2

(iii)$n = 3$のとき

k_3 + k_4 = $2c_5$

1 + 3 = 4

(5)$k_{n+3} - k_n$ = $2c_{n+3}$の証明

(i)$n = 1$のとき

$k_4 - k_1$ = $2c_4$

3 - 1 = 2

(ii)$n = 2$のとき

$k_5 - k_2$ = $2c_5$

5 - 1 = 4

(iii)$n = 3$のとき

$k_6 - k_3$ = $2c_6$

9 - 1 = 8

(6)$k_{n+4} - k_n$ = $4c_{n+2}$の証明

(i)$n = 1$のとき

$k_5 - k_1$ = $4c_3$

3 - 1 = 2

(ii)$n = 2$のとき

$k_6 - k_2$ = $4c_4$

9 - 1 = 8

(iii)$n = 3$のとき

$k_7 - k_3$ = $4c_5$

17 - 1 = 16

以上より、（1）～（6）の性質は成り立つ。
異なる初期値の同じ漸化式を足したり、掛けたりすることにより、また異なる初期値の同

じ漸化式が成り立つことがわかる。

5　感想

　決まった条件のもとでは異なる初期値の同じ漸化式で表されることに数学の深さと楽しさを感じました。
さらに３つの数列から６つの性質が見つかりまた異なる初期値の同じ漸化式が成り立つことに驚きました。
初めはゴールが見えなかった卒研でしたが自信を持って発表できるようなよい研究ができたと思います。
先生には大変お世話になりましたありがとうございました。
先生からいろいろな発見を一緒に見つけることが楽しく勉強できました。