フィボナッチ数列のさまざまな一般化

☆黒田　美紀☆

1. 目的

　フィボナッチ数列を一般化したある数列の性質をいくつか見出し、それを数学的に証明する.

1.1. **数列の規則**.　フィボナッチ数列を一般化した次のような数列を研究する。
あるところにコドモ、セイネン、オトナがいて次の規則でふえているとする。

①コドモは１年後、セイネンになる。
②セイネンは１年後、オトナになる。
③オトナは１年後、コドモとセイネンを生み、オトナは生き続ける。

　１年目にはコドモが１、セイネンは０、オトナは０とする。
n年後、コドモの数を a_n 、セイネンの数を b_n 、オトナの数を c_n 、コドモとセイネンとオトナの合計を k_n 、と表す。

$$a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0,\ k_1 = 1$$

これらの数列をリストで表すと次のようになる。

$$\{a_n\} = [1, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \cdots]$$

$$\{b_n\} = [0, 1, 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, \cdots]$$

$$\{c_n\} = [0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \cdots]$$

$$\{k_n\} = [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \cdots]$$

この数列$\{k_n\}$はトリゴナッチ数列と呼ばれる。

2. 方法

数列をリストに表し項を１つずつずらしたリスト、それらをスカラー倍したリストを観察して、いろいろ試し、数列の性質を見つける。

数列$\{k_n\}$を１つずつずらした数列、２倍した数列をリストで表す。

$$
\begin{aligned}
\{k_{n+1}\} &= [1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, \cdots] \\
\{k_{n+2}\} &= [1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, \cdots] \\
&\vdots \\
2\{k_{n+1}\} &= [2, 2, 6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, \cdots] \\
2\{k_{n+2}\} &= [2, 6, 10, 18, 34, 62, 114, 210, 386, 710, \cdots] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

3. 結果

3.1. 数列の性質.

この数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{k_n\}$の間の関係を探した結果、次のような式を発見することができた。

（１）$k_n + k_{n+2} = 2b_{n+3}$

$$\{k_n\} = [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 57, 105, 193, \cdots]$$
$$\{k_{n+2}\} = [1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, \cdots]$$
$$2\{b_{n+3}\} = 2 \cdot [1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, \cdots]$$

（2） $k_n + k_{n+4} = 2k_{n+3}$

$\{k_n\} = [1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \cdots]$

$\{k_{n+4}\} = [5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, \cdots]$

$2\{k_{n+3}\} = 2[3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, \cdots]$

(3) $k_{n+1} - k_n = 2c_n$

(4) $k_n + k_{n+1} = 2c_{n+2}$

(5) $k_{n+3} - k_n = 2c_{n+3}$

(6) $k_{n+4} - k_n = 4c_{n+2}$

3.2. 数列の関係式.

数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$の関係は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n \\ b_{n+1} &= a_n + c_n \\ c_{n+1} &= b_n + c_n \end{aligned}$$

と表せる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

と表せる。

3.3. ３次行列のケーリー・ハミルトン.

３次行列Mの場合についてのケーリー・ハミルトンの公式を考えてみる。

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

tを変数とするとき，多項式$\varphi_M(t) = \det(tE - M)$は行列$M$の固有多項式である。

$$\begin{aligned}\varphi_M(t) &= \det(tE - M)\\ &= \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & t - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & t - a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$\varphi_M(t) = t^3 - \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t - \alpha_0$とおくと、
$\alpha_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\alpha_0 = \det(M)$

行列Mの対角成分の和$a_{11} + a_{22} + a_{33}$は$Tr(M)$と書く。
これを用いると$\alpha_2 = \mathrm{Tr}(M)$となる。$\varphi_M(t)$において$t = 0$とおくと
$\alpha_0 = \det(M)$を得る。
$\alpha_1 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}$となる。

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\varphi_M(M) = 0$$

$M = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\varphi_A(t) = t^3 - t^2 - t - 1$$

これより、ケーリー・ハミルトンの定理により、

$$\varphi_A(A) = A^3 - A^2 - A - E = 0$$

を満たす。

さて、

$$\mathrm{u}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

とおくと、(＊)により $\mathrm{u}_{n+1} = A\mathrm{u}_n$ が成り立っていることから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u_{n+1}} &= A\mathrm{u_n} \\
&= A \cdot A\mathrm{u_{n-1}} \\
&= A^2\mathrm{u_{n-1}} \\
&= A^2 \cdot A\mathrm{u_{n-2}} \\
&\vdots \\
&= A^n \cdot A\mathrm{u_{n-n}} \\
&= A^n \cdot A\mathrm{u_0} \\
&= A^n\mathrm{u_1} \\
&= A^{n-3} \cdot A^3\mathrm{u_1} \\
&= A^{n-3} \cdot \left(A^2 + A + E\right) \cdot \mathrm{u_1} \\
&= A^{n-1} \cdot \mathrm{u_1} + A^{n-2} \cdot \mathrm{u_1} + A^{n-3} \cdot \mathrm{u_1} \\
&= \mathrm{u_n} + \mathrm{u_{n-1}} + \mathrm{u_{n-2}}
\end{aligned}
$$

よって、

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{pmatrix}$$

このベクトルの第１成分から$\{a_n\}$についての 、また第２成分から$\{b_n\}$についての、第３成分から$\{c_n\}$についての３項間についての漸化式が得られる。

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$$
$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1} + c_{n-2}$$

このことより、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$は同じ漸化式を満たす。

4. 考察

4.1. 数列の空間.

命題

一般に、数列$\{a_n\}$を元とするベクトル空間を考える。
p, q, rを定数とするとき

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$$

を満たす$\{a_n\}$全体は部分ベクトル空間Wとなる。

注 $\{a_n\} \in W$のとき$\{a_{n+1}\} \in W$も成り立っている。

4.2. 数列の性質の証明.

　数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$について、３．結果で述べた性質を証明する。

　＜証明の方針＞

２つの数列が等しいことをいうには、
①両辺は同じ漸化式を満たす。
②最初の３つの値で両辺は等しい。
を満たせば、２つの数列が等しいことが証明される。

(１)$k_n + k_{n+2} = 2b_{n+3}$の証明

(ｉ)$n = 1$のとき

$k_1 + k_3 = b_4$

$1 + 1 = 2$

(ii)$n = 2$のとき

$k_2 + k_3 = 2b_5$

$1 + 3 = 4$

(iii)$n = 3$のとき

$k_3 + k_5 = 2b_6$

$1 + 5 = 6$

(２)$k_n + k_{n+4} = 2k_{n+3}$の証明

(ⅰ)$n = 1$のとき

$k_1 + k_5 = 2k_4$

$1 + 5 = 6$

(ⅱ)$n = 2$のとき

$k_2 + k_6 = 2k_5$

$1 + 9 = 10$

(ⅲ)$n = 3$のとき

$k_3 + k_7 = 2k_6$

$1 + 17 = 18$

同様に（３）〜（６）の性質も成り立つ。

異なる初期値の同じ漸化式を足したり、掛けたりすることにより、また異なる初期値の同じ漸化式が成り立つことがわかる。