生徒（あるいは教師）が時に「なぜだろう」と思うことがら

公田　藏

時に生徒あるいは教師（むしろ生徒ではなくて教師のほう？）が「なぜだろう」と思う（かもしれない）ことがらで，教科書はもとより，参考書でもそのことがらについての説明があまりなされていないものが，意外にあるように思われる．そのようなもの二三について，多少の私見を加えて以下に述べる．

１．四則演算の順序

たとえば $11 - 4 \times 3 + 20 \div 5$ のような，加減乗除の混合した式の計算は，左から順に計算するのではなく，加減に先行して乗除の計算を行う．これはそういう「規約」であるといえば，生徒は納得するであろうが，中には,「左から順に計算すれば簡単なのに，どうしてそのように取り決めたのであろう」と思うものもあるであろう．

1.1.

乗除を先行するというのは，代数に由来する．すなわち，文字を用いた代数では，$A \times B$ を，乗法の演算記号を省略して，単に AB と記し，AB が一つの「もの」として扱われる．これから，乗除先行の考え方が出てくる．しかし，式の計算は左から順に行うというのも，自然な考え方である．

実際，19 世紀末頃までは，加減乗除の混合した式の計算は，代数では乗除先行であるが，算術では，乗除先行と，左から順にという二つの方法が行われていたのである．わが国でも，明治 20 年代のの中頃までは，そうであった．

米国の Bryant と Stratton による商業算術書 “Commercial Arithmetic” は，多年にわたって版を重ねた書物である．それを改訂したものが “The Bryant and Stratton Business Arithmetic”（初版 1872 年）である（この書物の 1882 年版は森島脩太郎によって邦訳され，明治 19 年に『商業算術書』として文部省編輯局から出版された）．この本では，上記の二つの計算法が紹介されているが，簡単だからという理由で，この商業算術書では，左から順に計算するという方法によっている．代数を扱わず，商業算術を扱う限りでは，それで支障はなかったであろう[1]．このことについて，原著（17 ページ）には次のように記されている．

> The signs + and − are sometimes regarded as separating terms, and × and ÷ as uniting into one term the numbers between which they stand, and these principles are genrrally applied in Algebra and higher mathematics. It is more simple in Arithmetical combinations to regard each number as separate term

[1] 商業計算では，何と何と何とを加え，その結果を何倍かし，それからある数を引くというような種類の計算が扱われることが多い．このような計算を式に表すのには，左から順に計算する方式を採用すれば，一々括弧を用いることなく簡便である．これが大きな理由であったと考える．

> unless the ( ) or vinculum be used, and this rule has been followed in this book. Thus, by the first principle stated, $17-4\times3+20\div5=17-12+4=9$, but accoding to the *arithmetical* method the value of the same is $11\frac{4}{5}$.

邦訳では，最後に「 学徒須ク此区別ヲ心ニ記シ彼此ヲ混同スルコト勿レ」という文言がつけ加えられている（邦訳，第一冊 13 – 14 ページ）．

藤澤利喜太郎は,『算術条目及教授法』（明治 28（1895）年）において，加減乗除の混合した式の計算について，次のように述べている（同書，170 ページ）．

> 符号ノ連続スルモノハ文典ニ所謂命令法的ニ読ム通リニ解釈スルコトニ定ムベシ、例ヘバ、 $15+6\div3$ ハ、拾五ニ六ヲ加ヘ、之レヲ参ヲ以テ割レト読ムベシ、則チ結果ハ七ナリ、拾五ニ、六ヲ三ニテ割リタル商弐ヲ加フル場合ニハ、必ラス $15+(6\div3)$ ト書クベシ、此ノ事ニ就キテ著者ハ毎度質問ヲ受ケタルコトアリ、何レニテモ宜シキコトナレド、兎ニ角ニ確定シ置クコト無益ニアラザルベシ

「何レニテモ宜シキコトナレド、兎ニ角ニ確定シ置クコト無益ニアラザルベシ」という文言は，当時二つの方法がともに行われていたことを示している．

しかし，藤澤は，明治 32 年の夏季講習会で行った数学教授法の講義において，括弧の用法に関連して，藤澤の編纂した中学校用の『算術教科書』（初版は明治 29（1896）年）について，この本では

> 従来ノ慣例ニ依ツテ乗除ヲ加減ヨリ先キニヤルコトト定メマシタカラ彼ノ条目ニ書イテアルコトヲ訂正致シマス、尤モ箇様ナ式及複雑ナル式ハ余リ書カナイ様ニ希望致シマス

と述べている（『数学教授法講義筆記』（明治 33（1900）年），153 ページ）．中学校では算術に続いて代数を教授するから，代数を学ぶ際に生徒が混乱しないようにという配慮があったと考える.「従来ノ慣例ニ依ツテ」とあることから，乗除先行は，明治 20 年代（の後半）に定着したと考えられる．

1.2.

上に引用した Bryant-Stratton や藤澤『数学教授法講義筆記』には明記されていないけれども，$A\div B\times C$ のような，乗法と除法を含む式の演算の順序については，左から順に計算するという方式と，乗法を優先して $A\div(B\times C)$ として計算するという方式の二つが行われてきた．例えば，$8\div2\times4$ は，前者によれば 16 で，後者によれば 1 である．わが国でも，明治前期に出版された算術書の中には，四則演算の順序については，乗法，除法，加減の順序であると記されたものがある．

Frorian Cajori は，その著 “A History of Mathematical Notations” vol. 1 （1928 ; 全 2 巻の合本が Dover Publ. から復刻されている）において，乗法と除法を含む式の演算の順序については,「現在，一致した見解はない」と述べている．そして,「このような表現を避けるのが最善である」と記している（同書，274 ページ）．

現在では，$A \div B \times C$ は，算術（文字を扱わない）では左から順に計算するという方法が定着しているが，文字式の場合には，式の表記の仕方によって意味が変わってくると考える．

(1)　$A \div B \times C$ ，これは算術の場合と同様に，A を B で割り，それに C を掛けることを意味する．

(2)　$A \div BC$ ，これは A を BC で割ると考えるのが妥当である．

(3)　A/BC ，これも A を BC で割ると考えるのが妥当であろう．

(4)　$A \div B \cdot C$ ，$A/B \times C$ ，$A/B \cdot C$ ．これらの表記は多少曖昧さをもつので，避けるほうがよいと考える．括弧を用いて $(A/B) \cdot C$ ，$A/(B \cdot C)$ のように記すのが適当である．

ところで，$A \div B \times C$ をそろばんや筆算で計算して数値を求める場合には，これを $A \times C \div B$ と変形して，先に $A \times C$ を計算してから B で割るほうが誤差が少ない．このことは，わが国では，吉田光由の『塵劫記』の中ですでに注意されている（「金両かへの事」の条）．しかし，明治初期にわが国にもたらされた西洋算術書の中には，このことに注意を払わず，そのために杜撰な数値計算を示しているものもあったのである．

２．二次方程式の解法について

一次方程式では，未知数を含む項を左辺に，未知数を含まない項を右辺において解く．これに対して，二次方程式では，ふつう教科書に示されている方法は，すべての項を左辺において解くことであって，未知数を含む項を左辺に，未知数を含まない項を右辺において解くのではない．「二次方程式は，未知数を含む項を左辺に，未知数を含まない項を右辺において解くことはできないのか」，これは時に生徒がもつ疑問である．

また，二次方程式の解の公式は，生徒がそれ以前に学んだどの公式よりも複雑である上に，公式を導く過程も，式の変形は，生徒がそれまでに学んで練習したものよりは複雑で，しかも最終結果に到達するまでの道程が長い．二次方程式の導入から解の公式にいたるまでの指導の順序と方法については，教師のほうが，時にこのままでよいのか，改善の方策はないかと考える所であろう．

以下に，二次方程式の指導についての一つの案を記す．なお，文字は実数を表すとする．

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は，両辺を x^2 の係数で割ることにより，

$$x^2 + px + q = 0$$

の形になるから，以下この方程式で考える．

(1)　$p = 0$ の場合は，方程式は $x^2 + q = 0$ ，すなわち $x^2 = -q$ となるから，方程式を解くことは，$-q$ の平方根を求めることに帰着する[2]．したがって $x = \pm\sqrt{-q}$ ．よって解は $\sqrt{-q}$ と $-\sqrt{-q}$ とである．

(2)　$q = 0$ の場合は，方程式は $x^2 + px = 0$ となる．左辺を因数分解すれば，方程式は $x(x+p) = 0$ となる．よって，$x = 0$ または $x + p = 0$ ．これから解が 0 と $-p$ とであることがわかる．

[2]実数の範囲で考える場合には，ここで $-q \geqq 0$ ，すなわち $q \leqq 0$ という条件がつく．実際の指導に際しては，$-q$ とマイナスの記号がつくのを避けて，$-q$ を A とおき，方程式を $x^2 = A$ の形にするほうがよいであろう．

(3)　(2) と同様に考えれば，x^2+px+q が簡単に因数分解できる場合には，因数分解によって $x^2+px+q=0$ の解を求めることができる．

ここで，正の数 A の平方根を求めることは，二次方程式 $x^2=A$，すなわち $x^2-A=0$ を解くことにほかならないこと，そして，この方程式は $(x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A})=0$ と左辺が因数分解されることに注意しておくことは，時に重要であると考える．

(4)　解の公式を導くには，方程式のすべての項を左辺にまとめたままではなく，未知数を含む項を左辺に，含まない項を右辺においた

$$x^2+px=-q$$

から平方完成をするほうがわかりやすい．

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$$

これは上の (1) の型であるから，

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

よって

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

(5)　二次方程式の「一般形」 $ax^2+bx+c=0$ に対する解の公式は，(4) とまったく同様にして，もしくは，(4) で $p=\dfrac{b}{a}$，$q=\dfrac{c}{a}$ とおくことによって求められる．

ここで述べた二次方程式の指導の順序は，目新しいものではない．以前の代数の教科書（特に明治時代から昭和十年代の半ばまでのもの）では，二次方程式の章がこのような順序になっていることが多かったのである．

速やかに解の公式に到達するためには，(2)，(3) を省いて (1) から (4) へ進めばよいわけであるが，学習者（生徒）に対する配慮から，(2)，(3) を入れて二次方程式について慣れさせるとともに，既習事項である因数分解を応用して簡単に解ける場合のあることを知らせるという順序をとっている．なお，筆者はそう詳しくは調べていないけれども，ax^2+bx+c のまま扱って，

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

と変形して解の公式を導くという方法が教科書で採用され，それが「一般的」になったのは，二次関数のグラフが強調されたり，二次関数から二次方程式という順序で指導された時期からではないかと考えている．二次関数の指導を先行するのではなく，最初に二

次方程式を取り扱う場合には，上に述べたような方法のほうが適当であると考える．また，二次方程式，二次関数，いずれを先に扱うにしても，それ以前に文字式の計算についての知識と技能が必要であることは忘れてはならない．

（付記）今回の学習指導要領の改訂によって，中学校の数学では二次方程式の解の公式が扱われるようになった．しかし，中学校が義務教育であることと，中学校で扱われる式の計算の内容・程度を考えると，教科書の記述はどのようになっているにせよ，二次方程式の解の公式を導く実際の指導に際しては，場合によっては，上の（4）の形，もしくは数係数の方程式について解の公式を導く手続きを説明し，これと同様にして一般に次のことが成り立つとして解の公式の一般形を示すという程度（すなわち，現行のものからあまり大きく進み，深入りすることのない程度）でよいのではないかと考える．中学校の数学として重要なのは，方程式の解の意味，解の公式を導く方針と考え方のあらましを理解することと，解の公式あるいは因数分解を用いて二次方程式を解くこと，そしてそれを実際の問題に役立てることであると考える．解の公式を導くのに多くの時間と多大の労力をかけるのは，一部の生徒に対してはともかく，国民全体の教育という面からは，いかがなものかと考えるのである．もしそれだけの時間と労力があるならば，それをもっと有効に利用するほうが中学校の数学教育の改善になるのではないかとも思うのである．

３．新しい概念，用語や記号に由来する疑問

3.1.

用語や記号に対しての小さな疑問（それは不十分な理解に由来することが多い）が，それ以降の数学の学習に対して障害となることがある．その一つの例は，数学で用いられる「または」という言葉である．日常用語で「甲または乙」というときは，甲，乙の一方だけという意味に用いられることが多いので，最初のうちは数学用語としての「または」がわかりにくいようである．「任意」という用語も，慣れるまでは難しい．「または」に限らず，数学の用語で，日常用語としても用いられているものについては，その意味する内容を，定義を通して理解するというのではなく，日常の用語として用いられる際の意味や，用語の文言からの感覚などの先入観をもって意味を推測し，そのためわからなくなって「これはどうしたことだろう」と疑問をもつ生徒がある（これは「文系」の学生に多いように思われる）．なお，用語については，このような疑問をもたず，それどころか用語についてまったく無神経な学生・生徒が多いのである．

高校までの数学では，どの教科書でも，用いられる用語や記号に大きな違いはないが，大学レベルの数学の書物では，本によって用いられる用語や記号に若干の相異があり，しかも，ある一つの用語や記号の意味する内容が，書物によって違っている場合がある．これは，学生にとっては案外難しく，「数学のような厳密な学問で，どうしてこのようなことがあるのだろう」と疑問に思う学生がいる．

3.2.

学校数学で取り扱われる数の範囲は，学習が進むにつれて拡張されていく．すなわち，小学校では，自然数（低学年では大きい数は扱わず，学年が進むに従って次第に大きい数を扱うようになっている）から分数・小数，ついで中学校では負の数と簡単な無理数

が扱われる．高校数学では虚数が導入され，数の範囲が複素数まで拡張される．複素数を実数の対としてみるならば，ベクトルはその延長上にある．

実係数の二次方程式は，実数の範囲では必ずしも解をもたない．そこで，考える数の範囲を拡張して，実係数の二次方程式がすべて解をもつようにしようということから，複素数が導入される．虚数の導入は形式的で,「負の数の平方根を考える」ことから虚数（純虚数）が導入される．その際，次のような疑問をもつ生徒は，かなり多数あると考える：

「中学校では，どんな数も 2 乗して負になることはないから，負の数の平方根はないと教わった．ところが，高校の数学を学びだして間もなく，負の数の平方根を考えようといわれた．いままで「ない」といわれてきたものを「ある」と考えろというのは無理ではないか．数学は論理的だといいながら,「ない」ものを「ある」と思えというのではないのか．これは詭弁で，ここには矛盾が含まれているのではないか．2 乗して負の数になる，虚数というのは，いったいどこにあるのか.」

この疑問は，学習が進み，複素数は平面上の点として表現することができるということまで行けば，一応解決するであろうと思われる．しかし，それまでの間，どのように説明し，生徒に一応納得してもらうか，それが問題である．ここで数学に疑義や不信感をもつことがないようにすることが重要である．そのためには，生徒の実態に即した適切な説明が必要であると考える（このことは虚数の導入の場合とは限らない）．

なお，生徒は，説明を受けて，説明された内容は理解しても，それで納得するとは限らない．上の「虚数」もその一例であろう．他の例としては，循環小数 $0.333\cdots = \dfrac{1}{3}$ は理解し，納得できても $0.999\cdots = 1$ はなかなか理解し，納得することが難しいことがあげられる．

４．多様な方法にともなう疑問

4.1.

不定積分では，積分が見かけ上異なったいくつかの形で表されることがある．たとえば，$\displaystyle\int \sin x \cos x dx$ は， C を積分定数として，次のように，見かけ上異なった三つの形に表される．

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C, \quad -\frac{1}{2}\cos^2 x + C, \quad -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

もう一つの例として，これは高校数学ではなく大学レベルのものになるが，積分

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x - x^2}}$$

を考える．被積分関数の根号内が $2 - x - x^2 = (2 + x)(1 - x)$ と表されることから，この積分は，二次の無理関数の不定積分の「定石」 $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{2+x}}$ によって置換し，有理関数の積分に帰着させて計算すれば，

$$I = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2+x}} + C$$

が得られる．他方，$2-x-x^2=\dfrac{9}{4}-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形されることから，この積分は

$$I=\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$$

と表されることがわかる．

このように，解が見かけ上異なったいくつかの形で表される場合には，学生は，正しい解に到達しても，自分の得た答が，たとえば教科書の巻末に記されている答と異なった形であるときには，自分の得た結果は果たして正しかったのかどうか，疑問をもつことが多いようである．このような疑問に対しては，教室での演習の際であれば，教師のほうですぐ適切な指導をすることができる．

4.2.

ある一つの問題が，いろいろな方法で解ける場合がある．たとえば,「周の長さが 20cm である長方形のうち，面積の最大なものを求めよ」という問題は，二次関数の最大・最小の問題として扱われることが多いが，それ以外にもいろいろな方法で解けるし，平面幾何の問題には，初等幾何，座標，ベクトル，複素数の利用のいずれによっても解けるものがある．このような，多様な方法で解ける問題に対して，時にいくつかの異なった解法を示すことは，数学のいろいろな方法を学ばせ，それぞれの方法のおもしろさや長所と短所などを知らせる上で有意義である．しかし，生徒の中には,「それらの解法の中のどれが一番よい方法で，どの解法を記憶したらよいか」という疑問をもつものがかなりあるように見受けられる．このような生徒に対しては，生徒に応じた，適切な助言と指導が必要であると考える．教師のほうにも，授業時間数が少ないことを理由に，一通りの解法だけを示して終わりとする傾向があるようにも思われる．この点は改善する必要があろう．

数学を学んでいて，学んだあることがらについて,「なぜだろう」と思う生徒は，数学に興味・関心のある生徒である．その生徒の数学に対する興味・関心をさらに高めるよう，適切な助言と指導が必要である．なお，生徒は「なぜだろう」と思いながらも，それがなかなか質問などの形で出てこないのも現実である．疑問のままに止めておかないための方策も必要であると考える．

（付記）本稿は 2009 年 1 月の「数学教育の会」での発表内容に加筆を行ったものである．