素朴な感覚から入る数学教育

日本医科大学基礎科学　儀我真理子

e-mail : mariko@nms.ac.jp

人間は数学をどのように理解しているのであろうか．私は”感覚的に”も理解したい．そうしないと理論を追い終わった瞬間にすべて出ていってしまう．多分優秀な人たちは，論理だけを見ても，自然にそこに感覚がついてくるのであろう．しかし，多くの人が大学の数学を学ぶようになった今，教員がそれを手助けすることが必要だと思う．

私は，なぜこういうことを考えたくなるのか，この定理や概念の大事な所はどこか すばらしい所はどういう所か，この 2 つの定理の関係はどうか，などをなるべく話すようにしている．定義についても，なるべくいていねいに説明をつけるようにしている．定理は証明して導けたものだが，定義は言葉の意味だからそのまま覚えるだけ と思っている学生が多い．でも定義は，歴史的にも新しい概念の始まりと関係していることが多い．だから，なぜこういうことを考えたくなったのか，ここはなぜこのように定義することが自然なのか などを話すようにしている．

私はプリントを学生に配って講義をしている．書き込み式で，定義，定理，例，例題などは書いてあるが，証明や例題の解などは，私の板書や説明を書き込ませている．その意味ではプリントは要点のみということなのであるが，その他に上のパラグラフで書いたようなことを割とくわしく初めからプリントに入れている．学生は普通講義を追うだけで精一杯で，これらを話すだけだと耳に入らないからである．だから，私のプリントは数学の講義用としてはかなり普通の文章が多い．

数学の研究会にいくと，少しでもわかればおもしろみも感ずるが，わからなければそれはただ記号の羅列で，”どうして私はこんなつまらない数学なんて職業に選んだのか”と後悔するばかりになる．数学は，その内容がどんなにすばらしくても，理解できなければ確かに無味乾燥な記号の羅列なのである．そこに生命を入れるためには、ある程度の理解が不可欠である．学生の理解を助けるためにも，数学の生き生きとした側面を教師が見せる工夫をする ということがとても大事であると思う．

解析学（条件収束）

定理 3.6　条件収束しかしない級数は, その順序を適当に変えることにより，いかなる値にも収束させることが可能であり，また発散させることも可能である．

@ これを見ると，正項級数，絶対収束する級数 に関する定理 2.3, 2.5 の内容は，決して自明でないことがわかるであろう．

@ 以下のように $\{b_n\}, \{c_n\}$ を作るとき， $\{a_n\}$ のすべての項をどこかでは使わなくてはいけない． また，以下の操作 (1),(2) が可能なことは，命題 3.5 が保証している．

(1) 有限値 A に収束させたいと思ったら，$\{a_n\}$ の順序を変えた $\{b_n\}$ $(\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A)$ を次のように作る．

(2) $+\infty$ に発散させたいと思ったら，$\{a_n\}$ の順序を変えた $\{c_n\}$ $(\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty)$ を次のように作る．

命題 3.5　条件収束する級数は，正項，負項別々に考えると各々の級数は発散する．

解析学（収束半径）

例 7.1

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \ (1)$$
$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \ (2)$$

(2) は複素数 z のべき級数である．これは $|z| < 1$ でしか収束しない． $z = \pm i$ は左辺の分母を 0 にするからこれは自然である．実数のべき級数である (1) は，左辺はすべての実数で意味を持つ．しかしこの右辺も $|x| < 1$ でしか収束しない． $\pm i$ での不具合が実数まで及んでいるのである．

線形代数（内積の定義）

定義 4.1　ベクトル空間 X における**内積**とは, 次の公理を満たすベクトル対 $(\cdot,\cdot)$ である．

(1)　(2)　(4)　(5)

(3)　$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$　　($\overline{\bigcirc\bigcirc}$は共役複素数)

@ 複素数値 $\mathbf{C}$ の内積を考えるとき， どうして定義 4.1(3) のように定義するのであろうか．

統計学（棄却，採択）

@ 検定における棄却，採択の意味をもう一度考えてみよう．

図 5.3.2 は，仮説 $\mu = \mu_0$ が正しいとしたとき の，$\bar{X}$ の 標準化変換 Z の分布 である．つまり，$\mu = \mu_0$ が成り立ってるとしたとき，標本を何回か取ると当然それらの間にはばらつきがおこるから，$\bar{X}$ の標準化変換 Z の分布はこのような分布になる，という分布である．

たとえ仮説が正しくても，ときにはたまたま偏った標本になり，Z の値がグラフの端の方になることがある．でもそんなことはめったにないから，実際の標本から計算した Z の値がグラフの端の方の値をとったら棄却，つまり $\mu = \mu_0$ は成り立っていないと結論づけましょう とするのである．しかし，母集団において $\mu = \mu_0$ が成り立っていても，Z の値がグラフの端の方の値をとることがときにはあり得る．だから ”棄却 ” と結論するのは実は誤りであった という危険もあるわけで，その危険の確率は，意味から考えて有意水準 α に等しい．この意味で有意水準のことを**危険率**ともいう．それでは採択の方はどうだろうか．これも，本当は 母集団では仮説が成り立っていないのに，採択としてしまう心配だってあるはずである．

でも基本的な検定では，こちらはあまり深く追求しない．なぜかというと，棄却と採択は同等ではないからである．棄却は，上に述べたように ”仮説はうそらしいから棄却しよう ” という意味である．しかし採択は，” これくらいなら棄却するには及ばない ” という意味である．たとえそのときの標本平均が μ_0 からある程度ずれていても，” 標本の具合によりそれくらいずれることはあるよ．” という感じなのである．

確率論（ポアッソン分布）

@ いくら確率が低くても，火災はおこるかおこらないかのいずれかであるから，二項分布に従うはずである．なぜポアッソン分布を使うのか？

@ p の値が小さく n がある程度大きい場合，$\lambda = np$ とすると二項分布とポアッソン分布はかなりよく近似する．下の図は $B(10, 0.12)$ と $P(1.2)$ を比較したものである．

例 2.9　ある機械から生産される製品には 0.4%の割合で不良品がある．200 個の製品を取り出したとき，この中に不良品が 3 個以上含まれる確率を求めよ．ただし，$e^{-0.8}$=0.4493 とする．

例 2.10　ある機械から生産される製品では，不良品は 1 日平均 0.8 個である．不良品が 1 日 3 個以上作られてしまう確率を求めよ．ただし，$e^{-0.8}$=0.4493 とする．

@ 例 2.9 と例 2.10 は，非常に低い確率の話なのでポアッソン分布が使える．ポアッソン分布を使うとこの 2 つは同じ計算になる．例 2.10 を例 2.9 のように考えようとすると，$B(200, 0.004)$ に従っているかも知れないし，$B(400, 0.002)$ に従っているかも知れない．しかし，それはほとんど同じと思って差しつかえない．

複素関数論（複素平面上の関数への拡張）

@ 今まで我々は z の多項式や有理関数を扱ってきた．それは z を $a+bi$ で定義し，その和，定数倍，積，商を定義することにより考えることができたのである．

@ 指数関数，対数関数，三角関数などで，変数である実数 x のところを複素数 z で置き換えたものは，つまり何か？　我々は今，これらの関数を複素平面上の関数として考えようとしている．

@ 複素数 z の指数関数を，例えば考えようと思ったら，新たに定義しなくてはいけない．その定義は，

1. z が実数のときは，実変数の指数関数と一致させたい．つまり，実変数のときの拡張にしたい．
2. 実変数の指数関数がもつ基本的な性質を保つようにしたい．
3. もちろん，正則関数にしたい．
4. 他の形 (例えば，テーラー展開) で表された実変数の指数関数からの拡張と，一致させたい．

などの要請に応えるものでなければならない．

複素関数論（対数関数）

@ 対数関数について

$z = re^{i\theta}$ とすると，　$\log z = \log(re^{i\theta})$　$(= w_o$とおく.)

$$e^{w_o} = re^{i\theta} = e^{\log r}e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}. \qquad \text{だから } w_o = \log r + i\theta.$$

しかし z は$z = re^{i(\theta+2\pi)}$とも表せるから，$\log z = \log(re^{i(\theta+2\pi)})$ $(= w_1$とおく.)

$$e^{w_1} = re^{i(\theta+2\pi)} = e^{\log r}e^{i(\theta+2\pi)} = e^{\log r + i(\theta+2\pi)}. \qquad \text{だから } w_1 = \log r + i(\theta+2\pi).$$

$re^{i\theta}$ と $re^{i(\theta+2\pi)}$ は，表記は異なるが同じ数である．しかし $\log r + i\theta$ と $\log r + i(\theta+2\pi)$ は異なる数である．

ひとつの数 z についても，一般には $z = re^{i(\theta+2n\pi)}$ と考えなければいけない．だから

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

となる．上でわかったことは，$\log z$ はひとつの z について無限個の値をとる，つまり ” **多価関数** ” である ということである．

複素関数論（Riemann 面）

@ 多価関数を 1 価関数にするのに，主値をとるのも 1 つの方法であるが，値域の方で別の値をとるものは定義域でも別のものとして考えてしまおうという方法もある．

複素平面 $\mathbf{C}$ の無限個のコピー $\mathbf{D}_j$ $(j = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ を用意し，それらを張り合わせてらせん階段のような面 R を作るのである．これを対数関数 $\log z$ の Riemann 面 と言う．(中略)「無限個の複素平面のコピーを用意する.」と始めたが，Riemann 面は，ばらばらなコピーをつなげた，というより，本来つながっている，ということがこれらの考察から読み取れるのである．