高専1年生へのオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

の導入の試み

津山高専　松田　修

導入の試みの理由１

- ２年生における電気基礎という科目の存在
- 電気基礎では，ベクトル計算とオイラーの公式を前提に講義が進められている．
- 物理におけるオイラーの公式の重要性

- 工学教育において，オイラーの公式は重要であるはず．
- しかし，実際には3年生のテイラー展開の後で，紹介だけで詳しく取り扱わない．

教科書：微分積分Ⅱ（大日本図書）

導入の試みの理由２

- オイラーの公式の理解は，ハードルが高い。
- e が理解し難い。
- e^{ix} の幾何学的イメージが理解し難い。
- これらを１回だけの授業で学習させることは不可能である。
- したがって，オイラーの公式を軸に，数学，物理，専門科目の連携をとり，スパイラル方式で学習させることが重要と考えた。

オイラーの公式導入の目標

●三角関数の加法定理を，オイラーの公式で証明させる。

＊今回の取り組みは試行的に，１年生（4クラス）の２クラスだけに行った。

学生の感想

１．導入直後の感想

オイラーという人の発想力がすごいと思った。

加法定理が簡単に証明できて，オイラーの公式は便利だと思った。

２．導入後３週間目の感想

オイラーの定理が，あのときは重要な気がしていたが，今，それが何故重要なのかイメージできない。本当に役にたつのだろうか？

導入結果の考察

- 導入の際には，オイラー自身の話も交えながら行って，授業としては活気があった。オイラーの公式も，授業の雰囲気で納得してもらった感が学生の感想からわかった。
- しかし，冬休み後，再度，加法定理の証明をオイラーの公式を使って行えという演習を課したが，オイラーの公式自体，９０％の学生が忘れていた。

定着させること

- 学生の重要性の判断基準は，テストに出ることである。
- だから，テストに出さないと忘れてもよいものと理解される。
- オイラーの公式に関する簡単な問題をテストに出題することで，公式の定着を図ることができると考えられる。

学生に教わった教訓

教えるだけではダメ。テストに出せ。

導入時間とタイミング

- 「eの導入」(50分)
- 「ベキ級数展開とオイラーの定理」(50分)
- 「演習レポート」(50分)

三角関数の加法定理の単元

(1) まず，加法定理と倍角公式を紹介し，計算練習をさせた。

(2) 次に，加法定理の証明の紹介。このときに，オイラーの公式を導入した。

津山高専の数学の授業

- １年生：基礎数学Ⅰ（４単位），基礎数学Ⅱ（３単位）

基礎数学Ⅰ（４単位）

（内容）　方程式と不等式，２次関数，（８週）

べき関数，分数関数，

無理関数，指数関数（７週）

対数関数，三角比（７週）

三角関数，（６週）（＊オイラーの公式）

数列（２週）

１年：基礎数学Ⅱ（３単位）

数と式の計算，場合の数，点と直線，

２次曲線，平面ベクトル，空間ベクトル

２年：微分積分Ⅰ（３単位），

線形代数（行列，行列式，固有値）（３単位）

３年：微分積分Ⅱ（偏微分，重積分）（３単位）

微分方程式（１単位）

４年：応用数学Ⅰ（確率・統計）（２単位），

応用数学Ⅱ（ベクトル解析，ラプラス変換，

フーリエ級数，フーリエ変換）（２単位）

４年以上

- ４年：数学続論（微分方程式，線形代数）
- ５年：数学特論（複素関数論）

＊４，５年は選択科目

専攻科

１年：線形代数（ジョルダン標準形，連立微分方程式，連立差分方程式，離散フーリエ変換）

２年：数理工学 （主に離散数学）

具体的におこなった授業報告

- 以下，具体的におこなった授業報告を行う。

e の導入

- 小学生へ π を導入するように, eを導入できないだろうか.

- 関数電卓の利用

  関数電卓でe の値を確認する.

$$e = 2.718281828$$

e を実感させる.

- １年間に利息100%の預金に1万円預ける.

問題１　１年後にいくらになりますか.

（答　２万円）

問題２　半年複利の場合,

１年後にいくらになりますか.

（答 $\left(1000\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=1000\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}=22500$円　）

問題３　１月複利の場合,

１年後にいくらになりますか.

（答　$10000 \times \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 26130$円　）

問題４　１日複利の場合,

１年後にいくらになりますか.

（答　$10000 \times \left(1+\frac{1}{12 \times 30}\right)^{12\times 30} = 27145$円　）

問題5　瞬間複利の場合，

　　　　１年後にいくらになりますか．

1秒複利の場合を考える．

$$10000\times\left(1+\frac{1}{12\times30\times24\times60^3}\right)^{12\times30\times24\times60^3}=27182円$$

● $\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を予測する．

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$ の確認

関数電卓を使う.

$$\left(1+\frac{1}{99999}\right)^{99999}=2.718268237$$

指数関数 e^x のベキ級数展開

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$ の紹介

関数電卓でチェックする.

$$e^2 = 7.389056099$$

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{16}}{16!} = 7.389056099$$

三角関数のベキ級数展開の紹介

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

e^x と $\cos x$, $\sin x$ のベキ級数展開は重要なので，今回は暗記してもらうことにした。詳しいことは3年生で習うと説明した。

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$　の導入

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

演習レポート

問題１．下の図は半径１の円の４分円である．直線QNとMLはy軸に平行で，QMはx軸に平行である．

(1)　QNを　を使って表せ.

(2)　OHとQHを　を使って表せ.

(3)　HLを　と　を使って表せ.

(4)　MHを　と　を使って表せ.

(5)　上の(1)～(4)を使って，

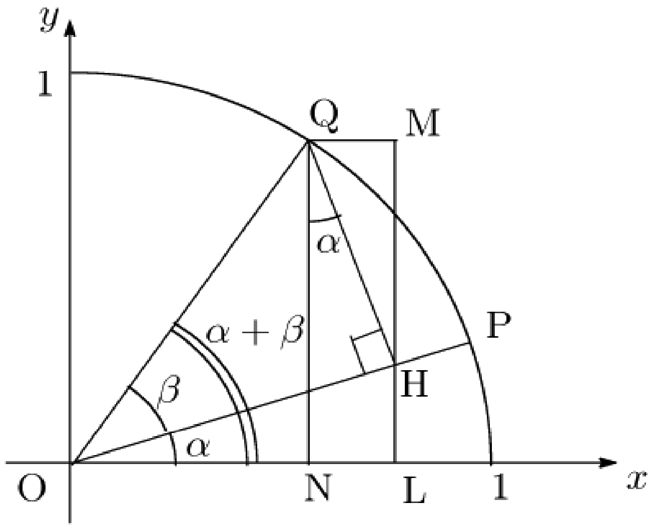
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

を証明せよ.

(6)　上の図を使って

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ.



問題２ オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

（1） オイラーの公式を使って，

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

を証明せよ．

（2） i^i の解の１つを求め，その近似値を電卓で求めよ．

（3） オイラーの公式についての想いを述べよ．