

2009.1.10. 数学教育の会

数学史の窓から ― 教室で使える話題

青年ライプニッツ，会心の円周率公式発見

東京海洋大学名誉教授、学習院大学非常勤講師 中村 滋

1 ライプニッツの生涯瞥見

ライプニッツ， Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

数学はライプニッツが卓越した天才を示した多くの領域のほんの一つでしかない。法律学，宗教，政治，歴史，文学，論理学，形而上学，思弁哲学など，いずれも彼の貢献に負うところがあり，そのうちの一つだけでも，彼の名声を後世に伝えるのに十分であると思われる。《普遍的天才》とは何の誇張もなく，彼に与えられる形容詞である。

[E. T. ベル著，田中・銀林訳『数学をつくった人びと I II III』(東京図書，ハヤカワ文庫)]

歴史全体を見渡しても，これほどの広い領域で歴史に残る仕事をした人はいないでしょう。ジョン・スチュアート・ミルも「知的能力の偉大さと普遍性において，ライプニッツ以上に注目すべき人物を挙げるのは困難だ」と書いています。微分積分学を発見するのはいわゆるパリ時代，1672年3月から1676年10月までの期間のことです。当時の科学の最先端の地に来たこの才能に恵まれた若者はホイヘンスとの出会いによって大きく躍進しました。これはニュートンの1664-6年以外に比較するものがないほどの，奇跡のような歴史的な大飛躍でした。

ホイヘンスのアドヴァイスでデカルトの『幾何学』などで最新の数学を，ほかのことは一切忘れるほどに集中して勉強したとといいます。こうして最先端の数学をマスターするや，そのまま一気に微分積分学の見解へと突き進むことになるのです。早い段階でライプニッツの変換公式を手に入れた彼は勇気百倍、新数学の確立に向けて励んだのでした。すでにこのパリ時代に今の微分積分の記号， dx や \int を考案します。人類の記号の歴史の中でも最高傑作のこんな記号を作ってくれた彼に，後世の我々凡人はいくら感謝しても足

りないでしょう。

マインツ選帝侯に仕えて、その特使としてパリに派遣されたのですが、マインツ侯の死により、彼は新たにハノーファー侯に仕えることとなります。しかしそのままパリにいてよいという許可をもらって、この若者は大きく飛躍したのです。しかし強い帰国命令が出て、仕方なしにハノーファーに戻った若者にまっていたのは、ハノーファー侯の家系図作りでした。各地を回って膨大な資料を精査し、学問にとっては何の意味もない、煩瑣にして瑣末な仕事に追い回される日々が続きます。このような日々の中で、微分の論文(1684)も積分の論文(1686)も書かれたのでした。

数学に限っても、微分方程式や変分法を含む解析の難問を次々に解き、パスカルの計算機を改良し、行列式を考案し、2進法を考え位置解析と呼ぶ新しい幾何学を構想し…、という華々しさですが、その間に諸国を回って国王に科学アカデミーの設立を呼びかけ、宗教対立の緩和に力を尽くし、そして独自の哲学体系を作り上げるのですから、驚いてしまいます。後にガウスは、これだけの数学の才能を持ちながらさまざまなことをやりすぎたと非難しました。ガウスの気持には全く同感でありながらも、やはりそう言えるのは史上最大の数学者ガウスだからこそであって、我々凡人としては、ただただライプニッツの成し遂げたことの大きさに感動するばかり、というのが正直なところではあります。

晩年は不遇で、ハノーファー侯がイギリスの国王になってロンドンに行く時に、一緒に行きたいという望みは断られ、友人たちが多くイギリスに渡るなかで、ひとり瑣末な家系図作りの継続を命ぜられたのでした。この知の巨人は同時代の人たちからはいつか忘れ去られていて、葬儀に参列したのは使用人一人だけだったということです。(この項、拙著『微分積分学21講』(東京図書刊)、コラム3を再録)

2 青年ライプニッツの普遍学構想からパリ時代まで

ゴットフリートの若い頃をもう少し詳しく見ておきましょう。生まれたのは1646年7月1日(ライプツィヒで使われていた旧暦では6月23日)、30年戦争(1618-48)の末期です。宗教間の争いに端を発したものの周辺諸国の思惑が重なったこの戦争では、一説にドイツの人口の2/3が失われたとも言われるほどの大きな被害を受け、特に農村部の荒廃は目に余るものがありました。父はライプツィヒ大学の道徳哲学教授で、母カタリーナとは3度目の結婚、ゴットフリートが生まれたときには49歳でした。父はゴットフリートが6歳のとき、若い母も18歳のときに病気で亡くなりました。7歳でライプツィヒ大学と縁の深いニコライ学院に入り、友達が置いていったラテン

語で書かれたリウウィウスの歴史書の挿絵と文章を繰り返し見てラテン語をマスターしたといひます。その後ギリシア語も独学でマスターして、膨大な父の蔵書を片っ端から読み漁りました。ホメロス、キケロ、プリニウスなどの古典はもとより、アリストテレスや中世のスコラ哲学の本も手当たり次第に読み、「ガラクタの中から黄金を見つけ」るようにして、ほとんど独学で学問の基礎を身につけました。そして1661年6月に大学生になり、父の死後道徳哲学の教授を継いだトマジウス教授から新しいデカルトの力学的機械論的な哲学体系のことを聞きました。そして悩みぬいた挙句、晦渋なスコラ哲学よりも新鮮で明快なデカルトを選び取ることにしたのです。そのためにもっと本格的に数学を学ぶ必要を感じて、1663年の夏学期にはイエナ大学に行き、ヴァイゲル教授による数学の講義を聴講します。この講義はパリにおけるような最先端の数学ではなかったものの、ヴァイゲルがエウクレイデス(ユークリッド)の『原論』をモデルにした論証体系を目指してアリストテレス論理学の改革を目指していたことと、数学を基礎に据えた諸学の統一、いわゆる普遍学を目指していた点で、青年ライプニッツには大きな影響を与えました。講義で初歩の組合せ論を学ぶとすぐにライプニッツは哲学的な概念を数学的に取り扱える数学の分科を構想しています。1学期でライプニッツに帰ったこの青年は、すでに哲学学士になっていましたが1664年2月には哲学修士になりました。その後、法学博士になることを目指して20歳のときに書いた意欲的な著作『結合法論』(1666)において、早くも生涯の目標を次のように定めています。

- (1) 諸学問の再編による体系化(「普遍学」構想)
- (2) 体系構築のモデルとしての数学の重視
- (3) 数学の基礎としての記号法の重視(記号的解析)

後の微分積分学構築もこのときの壮大なる「普遍学」構想の中で、その一環としてなされたものでした。だから初めから記号法を極めて重視して行われたのです。

結局ここでは博士にはなれず(若すぎることにやっかみではないかと言われています)、翌年アルトドルフ大学で法学博士になりました。大学に残るようという当時の文部大臣の要請を断り、彼は世間に出て行きます。ニュルンベルクで錬金術協会に入り、フランクフルトではマインツ選帝侯の元宰相ボイネブルクに会いました。その口利きもあって、1668年初頭から青年ライプニッツはマインツ選帝侯の宮廷顧問官になります。選帝侯シェーンボロンに対する直接の任務はローマ法の改革と司法改革でしたが、彼はさらに政策や社会改革に対しても様々な提言をし、高く評価されました。20歳代前半のこの時期に、彼はすでに宗教対立の融和、独自の哲学確立、「人間の幸福、社会の利益、神の名誉」という彼の基本的立場からの社会福祉理論、「抽象的運動論」「具体的運動論」「新物理学仮説」などの自然学(≡物理学)、更には

図書の整理法の基本などについて考えています。「万学の天才」は早くも始動開始です。隣国フランスでは太陽王ルイ XIV世が盛んに周辺諸国の国境に触手を伸ばし、国境を脅かしていました。ライプニッツは「エジプト計画」を作成して、フランスの興味を中東侵略にそらそうと提言します。状況が切迫してきたときにマインツ侯はこれを取り上げて、ライプニッツを外交官としてパリに送りました。これが有名な「ライプニッツのパリ時代」です。1672年3月から1676年10月、ライプニッツ25歳から30歳までの4年半に渡ります。生来社交的ではなかったことと、フランス語やその生活様式にも不慣れだった上に外交官としても活躍の場が得られず、パリでは孤独でした(パリ到着の前後にオランダ侵攻が始まりフランス軍の勝利に終わるのです)。おまけにボイネブルクの急逝(1672.12)、続いてシェーンボルン選帝侯の急逝(1673.2)と不幸が続き、彼は異国の地で身分を失いました。そこで今度はハノーファー公爵フリードリッヒの宮廷顧問官かつ図書館司書として仕えることにしました。1673年春にはロンドンで開かれた講和会議出席者の一員に入れてもらってあこがれのロンドン訪問も実現し、ロイヤル・ソサイアティーの会合に出たり自分の計算機の説明をしています。1672年11月には、当時オランダから呼ばれてパリ・アカデミーで活躍していたオランダのホイヘンスと出会い、生涯の親交を結びます。この出会いはライプニッツにとって大きな意味を持ちました。ドイツの片田舎で学んだ数学は、その最先端の地パリでは通用しないことが分かったからです。ホイヘンスの示唆を受けて青年ライプニッツは夢中で新しい数学を学びます。デカルトの『幾何学』ラテン語訳第2版(1659/61)、グレゴワール・サン・ヴァンサン、オノレ・ファブリの『幾何学提要』、ウォーリス、パスカルの「四分円の正弦論」などを夢中で学びました。デカルトの本はすでに知っていたのですが「それまでは敬遠気味だった」(晩年の回想)のでした。ホイヘンスが特に薦めたパスカルの論文は、デトンヴィルという変名で書かれ、実質的に正弦(sine)の積分を初めて求めたものです。これを読んでいるときに、パスカルの微小三角形(後にライプニッツは“特性三角形”と名付けました)からライプニッツは強いインスピレーションを受けました。「突然光が差し込んだが、パスカル自身は(奇妙なことに)それを感じとらなかったのである」とは後年の回想です。1673年5月と推定されている早い段階で、ライプニッツは“変換公式”と呼ばれる公式を発見します。これは微分積分学が作られる直前の時期に、巧妙な幾何学的な変形で得られた(実質的には)置換積分の公式です。これをうまく使って青年ライプニッツ得意の円周率公式を見つけたのでした(1674)。この話は節を改めて説明することにします。ホイヘンスにも褒められてすっかり気をよくした彼は、この後一気に微分積分学を作り上げてしまいます。1675年の秋には、ノートに dx や \int 記号が登場します。パリに出てきてから最新の数学を学び始めた彼は、こうして一気に世界の最先端に躍り出たのでした。

3 ライプニッツの円周率公式の発見

それでは青年ライプニッツ会心の円周率公式発見の経緯を詳しく見ていきましょう。後にグレゴリーが数年早く発見して手紙に書いていたことが分かって、今はグレゴリー・ライプニッツの公式と呼ばれる次の公式です。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

中心(1,0), 半径1の単位円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ の上半分は, $y = \sqrt{2x-x^2}$ と書けます。その左半分の四分円の面積はもちろん $\frac{\pi}{4}$ になります。従って,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$$

です。

一般に曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) において $A=(a, f(a))$, $B=(b, f(b))$ と置き, 曲線 AB と呼びます。曲線 AB 上の点 P でこの曲線に接線を引き, y 軸との交点を T, 原点 O から PT に引いた垂線の足を S とします。P から x 軸におろした垂線と T から x 軸に平行に引いた直線の交点を D とすれば,

$$\angle PTD = \angle TOS (=90^\circ - \angle OTS)$$

となります。曲線 AB 上に P の近くの点 Q を取り, $\triangle PQR$ を $PR \perp QR$ となるように作ります。 $PR=dx$, $PQ=ds$ はいずれも“無限小”で, Q が PT 上にあるとして良い (ライプニッツの説明です) ほどに近いものとします。このように考えると, $\triangle PTD \sim \triangle TOS$ となります。 $OT=t$, $OS=\sigma$ (図では p と書いた) とすれば, $ds : dx = t : \sigma$ となり, $t dx = \sigma ds$ が成り立ちます。

従って $\triangle OPQ = \frac{1}{2} ds \cdot \sigma = \frac{1}{2} t dx$ となり, 扇形 OAB = $\frac{1}{2} \int_0^s \sigma ds = \frac{1}{2} \int_a^b t dx$ が分かります。ところで曲線 $y = f(x)$ の接線 $Y - y = f'(x)(X - x)$ において $X = 0$ とすれば, $Y = t = y - x f'(x)$ となります。従って, A, B から x 軸におろした垂線の足を A', B' とすれば, 曲線 AB の下の面積は,

$$\int_a^b y dx = \text{扇形 OAB} + \triangle OBB' - \triangle OAA'$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b t dx + \frac{b}{2} f(b) - \frac{a}{2} f(a)$$

$$\therefore \int_a^b y dx = \frac{1}{2} [x f(x)]_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b t dx \quad [\text{ライプニッツの変換公式}]$$

となります。以上が一般の曲線 $y = f(x)$ についての変換公式です。

これを最初の四分円 $y = \sqrt{2x-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) に適用します。

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{y}$$

従って,

$$t = y - xy' = y - \frac{x(1-x)}{y} = \frac{y^2 - x(1-x)}{y} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

$\therefore t^2 = \frac{x}{2-x}$, これを逆に解いて, $x = \frac{2t^2}{t^2+1}$
となります. 明らかに $t(0) = 0, t(1) = 1$ なので,

$$\int_0^1 x dt + \int_0^1 t dx = 1$$

が成り立ちます. これらの式と先ほどの変換公式を用いて, 四分円の面積を求めることができます.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{2x-x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 t dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^1 x dt \right) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x dt = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1} dt \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \int_0^1 t^2 (1-t^2+t^4-t^6 \pm \dots) dt \\ &= 1 - \int_0^1 (t^2 - t^4 + t^6 - t^8 \pm \dots) dt = 1 - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} \pm \dots \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \dots \end{aligned}$$

最後に美しい公式が出てきました. この瞬間は青年ライプニッツにとってどんなにか嬉しかったことでしょう. 早速ホイヘンスに手紙で知らせました.

「円周に対する直径の比が, \dots , 直径を1とするとき円周は次の和,

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \quad (\text{et cetera, 無限に続く})$$

に等しいことが分かる。」(1674.10.)

これに対するホイヘンスの返信には次のように書かれていました.

「あなたが円の驚くべき性質を発見したことはあなたも否定しないでしょう. それは幾何学者たち(「数学者」を表す当時の呼び方)の間で永遠に有名になることでしょう。」

28歳のライプニッツにとって正に得意の絶頂の時ですね. この後1年ほどの間に, dx や \int 記号も含めて, 微分積分学の基本を一気に作り上げてしま

うのです。いつ見ても驚いてしまうような“天才の爆発”のときでした。ちょうど10年前に孤独な天才ニュートンに起きた奇跡が、全く異なる形でパリに滞在中のライプニッツに起きたのです。いずれも微分積分学を作り上げる直前の時期ですが、ニュートンは自らが発見した一般二項定理で関数を展開してそれを項別に積分することによって、またライプニッツは変換公式と巧妙な積分の変数変換によって、どちらも歴史に残る見事な成果を挙げて、そのまま一気に微分積分学を建設してしまったのでした。歴史の不思議な面白さを感じます。

なお、ライプニッツがこの公式をニュートンに知らせたところ、「あなたはこのを使って何を計算しようというのですか?」という返事が届いたそうです。たしかに円周率を計算するためにはニュートンによる工夫は極めて有効で、それによって彼は直ちに π の16桁を計算したのでした(数学史の窓④ 青年ニュートンの一般二項定理発見, 2008.9.13. 参照のこと)。しかし“美しさ”の観点から見たら、ライプニッツの公式は断然他を圧して光り輝いています。これは全く計算には向かないけれど、数学の美しさと思議さを体現した見事な成果です。それは発見者ライプニッツが感激しながら述べた通り、円周率というものが奇数の逆数を交互にプラス・マイナスすることによって出てくるという摩訶不思議な事実を捉えたことにあります。このような実用とは対極のところにある定理も数学の奥深さを示すものだと思います。似たような例を探せば、オイラーによるバーゼル問題の解を挙げる事が出来るでしょう。これは次のような級数です。

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

自然数の平方の逆数の和が円周率の2乗の6分の1になるという不思議な公式です。これはライプニッツの公式よりはずっと効率的ですが、計算目的のための公式ではありません。数の世界の不思議と魅力を伝えるために存在するかのような、妖しい美しさで人の心をとりにする公式です。「数学の美しさ博物館」なんて言うものがあったら、どちらもその要の位置に据えるべき美しい公式たちですね。

前回のニュートンの話とあわせて、微分積分学が作られる直前の時期の数学の雰囲気味わっていただけたら幸いです。そこには自分が見つけた公式だけを信じて、記号も何もない荒野を突き進む青年たちの姿がありました。そして大らかにして巧妙な級数の扱いがありました。目標を失いかけている日本の若者達に、こんな気迫に満ちた青年たちがいたことを伝えるだけでも十分に意義があり、彼らにも大きな感動を与えることが出来ると思います。それでは今日のお話はこれで終わりにします。ご清聴有難うございました。