高校から大学への接続

学習院大学 理学部
飯高 茂

平成 20 年 4 月 7 日

目 次

1 推薦の学生

学習院大学理学部数学科では、私が赴任する（１９８５年）数年前から、学校推薦による受験生を受け入れていた. はじめは受験生を推薦してくれる高校に敬意を表して全員受け入れていたのだが、そのうち留年から退学に至る学生（４年間在籍して、数単位しかとれなかった例もあった）が出るに及んで、「面接＝口頭試問」を厳格に行うことにし、１，２名が不合格になることもあった. その結果、数学の力の無い学生は入らなくなった. しかし、別の問題がおきた. 推薦の決まった学生は高校で遊んでしまうらしい. それではもったいない. 彼らに数学を勉強する動機を与え続けないと、入学までに学力が低下するのではないか、と危惧した. そこで合格が決定される１２月から１月にかけて合格した学生に来てもらい、彼らに無理にでも勉強させせようといろいろ試みた.

入学前の準備教育として講義をきかせるのも一案であり、何回か行ったが次第にもっと積極的に高校生に学ぶ姿勢をつけさせたいと思うようになった．その結果、セミナーをして発表させるのがよいだろう、と考えるに至った. 受験数学とは異なった数学らしい数学の本を読んできてもらい、それを順に発表してもらおうというのである.

数学らしい数学といえば、ガウスの正１７角形の作図問題の論文がいいだろう. 実際、ガウス自身が素人向けに書いた文が、高木貞治：近世数学史談にあるのでその部分を、Tex にした（松田修さんにしてもらった. 感謝）

2 正十七角形のセンセーション (高木貞治：近世数学史談 から)

2.1 十九歳の青年

1796 年 3 月 30 日の朝，十九歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起きでようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いた．この記念すべき出来事が「ガウス日記」の第一項として次のように記されている．同年 6 月 1 日発行の Jena の ＡＬに この発見が報告されている.

「正多角形の中で三角形，五角形，十五角形および辺数を次々に二倍して生ずるものの作図が可能性であることは幾何学の初歩を学んだものは誰でも知っていることで、そこまではユークリッドの時代に出来ていたのであるが，その後は初等幾何学ではそれ以上に出ら得ないことと一般に信ぜられていたように見える．少なくとも予はこの方面において更に一歩を進める試みの成功したことを聞かないのである.

この故に，今上記の正多角形の外になお多くのもの，例えば十七角形などの作図が可能であることの発見は注意に値するものと考える次第である．この発見は一層広汎なる或る理論の系題に過ぎないのであるが，その理論はなお少しく未完成のところがあるから完成の上で速やかに発表するであろう.

C.F.Gauss」

2.2 手紙

ガウスからゲーリングへの手紙の一部

貴下が予の D.A. 中の多角形の理論を億劫がるのは理由のないことと思う．思い切って手を付けて見られるならば，容易に分かるに相違ないのである．今小閑をぬすんでこの問題について書くが，十七等分を説明するだけではもとより理論を完全に示すことは出来ないのだから，それが動因になって貴下が直ちに源泉から一般論を汲み出すことを望む次第である．少なくとも予に於いては高等整数論の

研究は今もこの後も数学中最上のもので，如何ほど美しい天文学上の発見でも高等整数論が与える喜びに比べれば言うに足らないのである．

単に綜合的に十七角形の作図の可能性を証明するだけならば, それは簡単明瞭である．

2.3　積和の公式

今

$$360^\circ = 17\varphi$$

として, 次のように置く

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$$
$$\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = b$$
$$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c$$
$$\cos 6\varphi + \cos 7\varphi = d$$
$$a + b = e, c + d = f$$

従ってよく知られている通りに

2.4　2 次方程式の根

(1)
$$e + f = -\frac{1}{2}$$

簡単なる計算に由って, 但し

$$\cos n\varphi = \cos(17 - n)\varphi$$

に注意して, [1]

(一番目)

$$2ab = e + f = -\frac{1}{2}$$
$$2ac = 2a + b + d$$

(二番目)

[1] $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ を用いて変形する（飯高注）
$z = \cos\varphi + \ i\ \sin\varphi$, とおくとき ,$1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1} = \frac{z^m - 1}{z-1}, z^{17} = 1$ に注意

$$2ad = b + c + 2d$$

$$2bc = a + 2c + d$$

(三番目)

$$2bd = a + 2b + c$$

$$2cd = e + f = -\frac{1}{2}$$

(四番目)

故に

$$2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4a + 4b + 4c + 4d$$

即ち

$$2ef = -2$$

又は

(2) $$ef = -1.$$

(五番目)

そこで (1) と (2) とから, e と f とが方程式

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

の根, 従って一つは

$$= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}, \quad \text{又一つは} \quad = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}$$

前のが $=e$ で, 後のが $=f$ であることは数値からすれば, 一見して分かる. 但し数値に由らなしとなると, むずかしくなるから (特に一般の多角形に関しては) 此処では述べかねる (予の論文「或る特種の級数の総和法」参照).

(六番目)

さて a と b とは方程式

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0$$

の根であるから, その値は

$$= \frac{1}{2}e \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2)}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} \pm \frac{1}{8}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})},$$

ここでは上の符号が a, 下の符号が b に対するものであること明らかである. 何故なら

$$a-b=(\cos\varphi-\cos 2\varphi)+(\cos 4\varphi-\cos 8\varphi)$$

(七番目)

は無論正であるから, 全く同様に

$$c=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{(34+2\sqrt{17})},$$

(八番目)

$$d=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{(34+2\sqrt{17})}.$$

さて最後に $\cos\varphi$ と $\cos 4\varphi$ とは明らかに次の二次方程式の根である.

積 $\cos\varphi\cdot\cos 4\varphi=\frac{1}{2}c$ だから.

$$x^2-ax+\frac{1}{2}c=0.$$

(九番目)

故に

$$\cos\varphi=+\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c)},$$

$$\cos 4\varphi=+\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c)},$$

(十番目)

2.5 根の決定

然るに

$$2a^2=2+b+2c$$

になるから

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}c)}\\ &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})}\\ &\quad {}^{*}+\frac{1}{8}\sqrt{\{17+3\sqrt{17}-\sqrt{(34+2\sqrt{17})}-2\sqrt{(34-2\sqrt{17})}\}}.\end{aligned}$$

(十一番目)

これは予の D.A. に載せてある公式と同じであるが, 只 D.A. では上託 $*$ の所が誤植の為に $-$ になっている. 即ち D.A. の公式 h は $\cos\varphi$ ではなくて $\cos(\varphi/4)$ 即ち $\sin\dfrac{90^\circ}{17}$, 従って 34 角形の辺の半分を表わすものである. ーさて他の cos も全く同様の式で表わされる. 予は D.A. では $\cos n\varphi$ の代りに

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi$$

即ち方程式の $x^{17}-1=0$ の根を用いた. そうすれば凡てがきれい [zierlich] になるのである.

2.6 一般の場合

上記で (十七等分は) 十分である. 一般に p が素数のとき円周を p 等分するには

$$\frac{360}{p},\quad 2\cdot\frac{360}{p},\quad 3\cdot\frac{360}{p},\quad \cdots,\quad \frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{360}{p}$$

[度] の弧の $\dfrac{p-1}{2}$ 個の cos を適当に組分けをして、上託と同様の成果を収めるのであるが, それは予の D.A. の第 3 縞に述べてある理論に基づくのである.

(１２番目)

そこでは $\dfrac{1}{2}(p-1)$ なる数の因数が大切である. 若しもこの数が 2 の冪で, 例えば

$$p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537$$

ならば二次方程式のみが出て来るが, 反対に例えば $p=31,\ \dfrac{1}{2}(p-1)=3\cdot 5$ のよぅな場合には三次と五次との方程式を回避することが出来ないのである. この発見の歴史に関しては予は従来何等公表したことはないが, 今でも正確に記憶している. それは 1796 年 3 月 29 日であった [ガウス日記では 30 日, 上出] 僥倖はこの発見に少しも与らない. 方程式

$$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$

の根を二組に分けること, それから D.A.p.637 の下の方 [§ 356?] の美しい定理が出るのであるが, それは既に前から予には分かっていた. 日は記して置かなかったが,1796 年[2]の冬学期 (ゲッチンゲンでの予の最初の学期であった) その後凡ての根の間の整数論的の関係を専心考究してしる中に休暇にブラウンシュワィヒに帰省してした時, 上記の日の朝 (臥床を出る前) この関係を明瞭に看破することに成功した. それを特に十七角形に適用して数値を算出することは即座に出来たのである. その他 D.A. 第 7 編に述べた研究はその後に追加したものもある. 予はこの発見を

[2] [1795-1796] 年の冬学期

イェナの学芸新誌に報告したが, その文は1796年の5月か6月か [6月1日, 上出] に掲載されている筈である. Disq.Arith. の印刷は1798年4月から始めたが, 印刷が果取らず, 数回中止したこともあって (印刷所が移転をしてR綴から後は別の活字を用いた), ようやく1801年の夏に完成したのである. 1798年或は1799年のことであったがHuguenéき又はHuguenot なる者 (ブロシヤの士官) がブラウンシュワィヒにいて, Zimmermann から予の研究のことを聞いたというので, 予は彼の依頼に応じて小文を草して十七角形の理論を説明して送ってやったことがある (それはほぼ上文と同様或は更に詳細でもあったであろう). 聞く所によれば, その男は厚顔にも或る著書の中にそれを載せて, しかもそれが読者に彼自身の発見なるかの如き感を起さしめるように記述されてあるということである. 不幸にしてその著書は予のD.A. よりも数年の後に出版されたというのだから, 無恥もそこまで行けば滑稽である.⋯⋯ [下略]

1819年1月6日 ゲッチンゲンにて　C.F.G.

尚々、今これを発送しようとする所へ論文の別冊が到着したから幸便に一部同封して進呈する.

以上はガウスの書簡である.

3 高校生の反応

以上において、(十一番目) などとある箇所が、担当を分けた箇所である.

このときの高校生は「数学B」で「複素平面」を学習したので、ドモアブルの公式をみな学習していた. ガウスの文章は高校生には難しそうであるが、とても熱心に読んできてはつらつと発表してくれた.

詳しく読むと分かるように、必要な数学はｓｉｎ，ｃｏｓについての積を和に変える公式を繰り返し使い、２次方程式を解くだけである. ただし、２次方程式を根の公式でとくとき、２つの根がでるが、その符号がどうなるかはなかなか難しいところである. 高校生はグラフを書いたりして、詳しく調べ正確に決定していた. これには感心した.

私は大学１年のとき、「近世数学史談」を古本やで買って非常に興奮して読んだが、肝心の計算はしていなかった. 今回、高校生の説明を聞きながら、ガウスの計算や工夫が初めてわかり非常に面白かった.

高校生もこの本が推薦図書だとされても、字面を追うだけで数学として、計算しながら読むことはまずしないだろう. この機会に無理に読まされて、その結果、数学のすばらしさに感動しとてもよい経験をしたと思われる.

東京大学、京都大学の教授であった伊原康隆さんは高校生のころ、ガウスのレムニスケート関数の箇所を計算しながら詳しく研究的に読んだそうである. しかし、それは天才 : 伊原教授にして初めてできることである. 普通の高校生には強制的にやらせることが必要なのである.

近世数学史談を使ったセミナーは、都合４回行った. その後、ラーデマヘル・テプリッツの「数と図形」を取り上げ、その第 17 章 :「完全数」を読んでもらった. この箇所は基本的には素因数分解と等比数列の和の公式しか使わないので簡単である. しかし、偶数の完全数はメルセンヌ素数から得られる、という古代ギリシャ亜人が見いだし、オイラーが完成させた証明は難度が高く、その箇所を担当した女子高校生が「どうしても納得できない」といい泣きそうであった.

数学としては簡単なのだが、論理としては結構、手強い. 生徒に説明しながら思い出したことがある. その昔、私が高校生だった頃、この本を読み完全数についてはおおむね理解できたのだが、ここで紹介されたオイラーの証明は大変難しく、最後まで得心がえられなかった. それから、数学の世界で生きてきたため、このような論理展開を素直に理解できるようになっていた.

次の年は弥永先生の晩年の著作「ガロアの数学」の末尾で紹介されたガロアの処女論文 :「純循環連分数」をとりあげた.

「君たちと同年代だから、きっと読めるよ」と言って励ましながら、最初は２次連分数の計算練習などさせて、ついには純循環連分数に展開される２次無理数の条件を与える箇所をしてもらった. しかし、最難関の箇所は高校生には理解不能であった. 約１名を除いて高校生は「難しいけどすごいな」などと肯定的なレスポンスだったが、ある高校生は

「こんな難しいのをやらせるなんてひどい」

という意味のことを言って反発した.

4　帰納と類比

昨年（２００７年１２月）は、Ｐｏｌｙａの「帰納と類比」の第 IV 章「数論における帰納」をとりあげた.

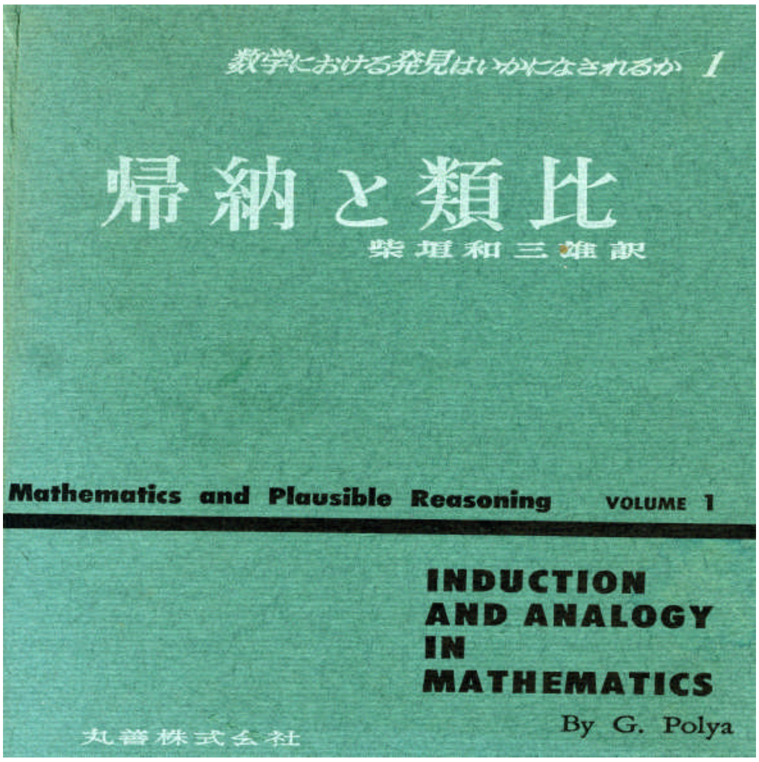
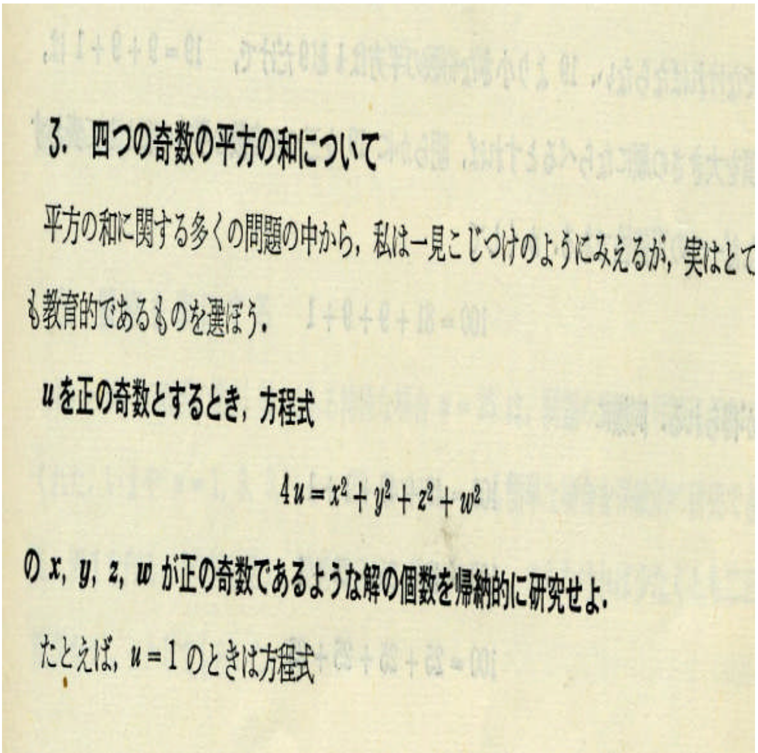


図 1: これも古い本である. 学生の頃読んだが詳しく読まなかったので完全燃焼できていなかった. 高校生と一緒に読んできちんと理解したいと思ったのである.

最初は、ピタゴラスの数をはじめから求めるという分かりやすいところから始める. この箇所があたった高校生は嬉々として説明した.



3. 四つの奇数の平方の和について

平方の和に関する多くの問題の中から，私は一見こじつけのようにみえるが，実はとても教育的であるものを選ぼう．

u を正の奇数とするとき，方程式

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

の x, y, z, w が正の奇数であるような解の個数を帰納的に研究せよ．

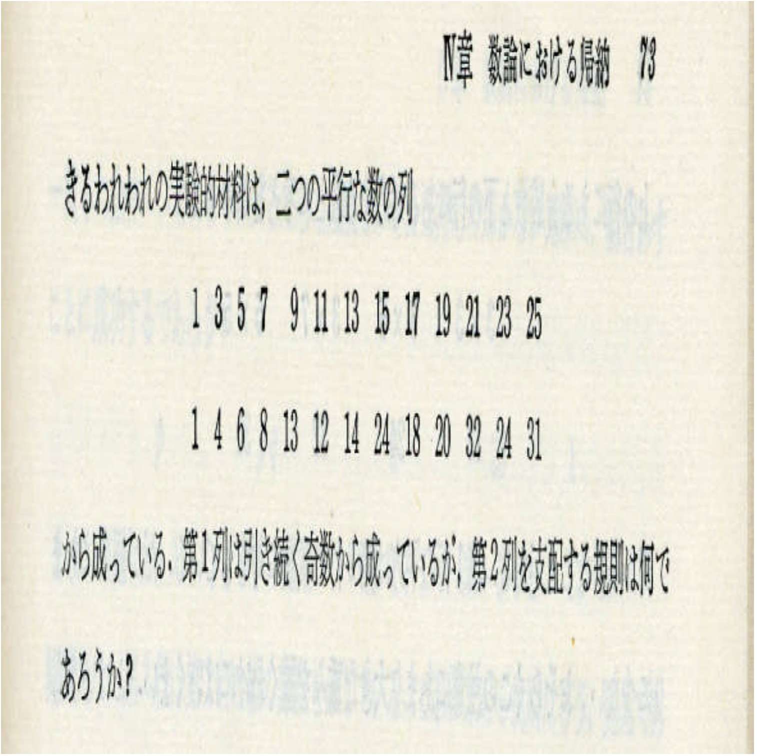
たとえば，$u = 1$ のときは方程式

図 2: 本論は u, x, y, z, w は正の奇数とするとき, 与えられた u について $4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ を満たす、解の数はどうなるか、という問題である.

表 I

u	$4u$	増加しない項	配列数	表現数
1	4	1 + 1 + 1 + 1	1	1
3	12	9 + 1 + 1 + 1	4	4
5	20	9 + 9 + 1 + 1	6	6
7	28	25 + 1 + 1 + 1	4	8
		9 + 9 + 9 + 1	4	
9	36	25 + 9 + 1 + 1	12	13
		9 + 9 + 9 + 9	1	
11	44	25 + 9 + 9 + 1	12	12
13	52	49 + 1 + 1 + 1	4	14
		25 + 25 + 1 + 1	6	
		25 + 9 + 9 + 9	4	
15	60	49 + 9 + 1 + 1	12	24
		25 + 25 + 9 + 1	12	
17	68	49 + 9 + 9 + 1	12	18
		25 + 25 + 9 + 9	6	
19	76	49 + 25 + 1 + 1	12	20
		49 + 9 + 9 + 9	4	
		25 + 25 + 25 + 1	4	
21	84	81 + 1 + 1 + 1	4	32
		49 + 25 + 9 + 1	24	
		25 + 25 + 25 + 9	4	
23	92	81 + 9 + 1 + 1	12	24
		49 + 25 + 9 + 9	12	
25	100	81 + 9 + 9 + 1	12	31
		49 + 49 + 1 + 1	6	
		49 + 25 + 25 + 1	12	
		25 + 25 + 25 + 25	1	

図 3: $u = 1, 3, 5, 7, \cdots, 25$ のとき解の総数を数える.$u = 1, 3, 5, 7, \cdots, 25$ のとき解の総数を数える. 実際にはいろいろな u について、高校生を班に分けて実際にしてもらう. この本では、解の総数を表現数と呼んでいる.



きるわれわれの実験的材料は，二つの平行な数の列

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

1 4 6 8 13 12 14 24 18 20 32 24 31

から成っている．第1列は引き続く奇数から成っているが，第2列を支配する規則は何であろうか？

図 4: u とその表現数 を上下に並べて、どんな関係があるか推理しよう.

1	**3**	**5**	**7**	9	**11**	**13**	15	**17**	**19**	21	**23**	25
1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31.

太文字の数字はわれわれの注意を引く．それらが何であるかを認めることは困難ではない：それらは**素数**なのだ．事実，上の表に関する限り，第1列における素数の**全部**である．この注意は，われわれの系列の由来を思い起こせば非常に驚くべきことのように見える．われわれは平方を考えて，素数はなんら問題にしなかった．素数がわれわれの問題に役割を演ずるとは不思議ではないか？　われわれの観察が意味慎重で，その背後に何か素晴らしいことがあるのではないかという印象を避けることは難かしい．

太文字でない第1列の数についてはどうだろうか？　それらは奇数ではあるが素数ではない．最初の1は個体で，ほかのものは

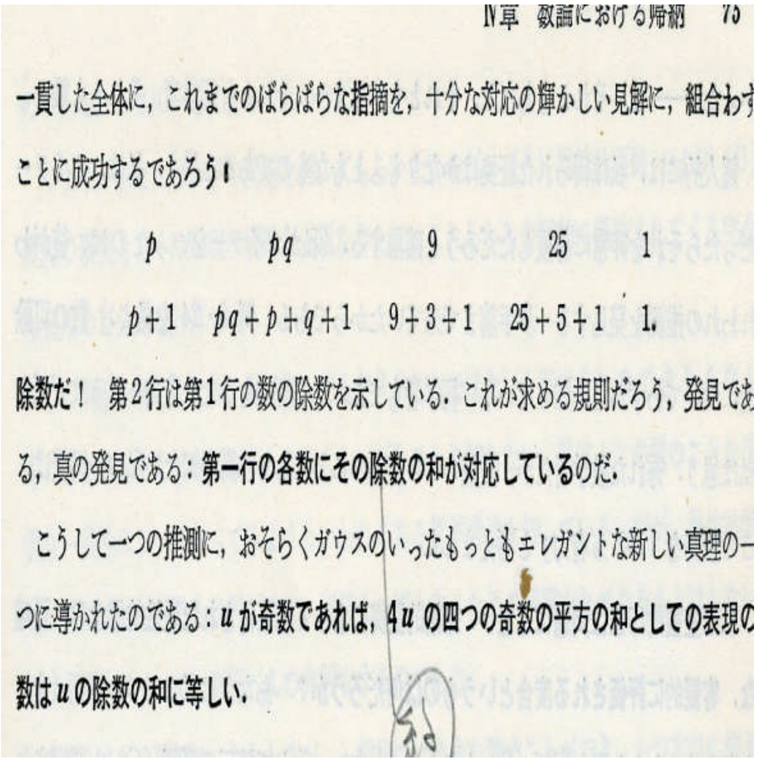
$$9=3\times 3,\quad 15=3\times 5,\quad 21=3\times 7,\quad 25=5\times 5$$

のような合成数である．第2列の対応する数の特性は何であろうか？

奇数 u が素数の時は，対応する数は $u+1$ である；u が素数でない時は，対応する数は $u+1$ でない．これはすでに気づいたことである．一つの小さな注意をつけたそう．$u=1$ であれば，対応する数も1で，したがって $u+1$ **より小さい**が，u が素数でない他のすべての場合では，対応する数は $u+1$ **より大きい**．すなわち u に対応する数は，u が個体であるか，素数であるか，合成数であるかによって，$u+1$ より小さいか，それに等しいか，もしくはそれより大きい．いくらか規則性がある．

図 5: 下から２行目に u が個体であるか、とあるがこれは英語で unity だから１の意味；誤訳である

Ⅳ章　数論における帰納　75



一貫した全体に，これまでのばらばらな指摘を，十分な対応の輝かしい見解に，組合わすことに成功するであろう：

p	pq	9	25	1
$p+1$	$pq+p+q+1$	$9+3+1$	$25+5+1$	1.

除数だ！　第2行は第1行の数の除数を示している．これが求める規則だろう，発見である，真の発見である：**第一行の各数にその除数の和が対応しているのだ．**

こうして一つの推測に，おそらくガウスのいったもっともエレガントな新しい真理の一つに導かれたのである：**u が奇数であれば，$4u$ の四つの奇数の平方の和としての表現の数は u の除数の和に等しい．**

図 6: 最後にガウスの発見したもっとも著しい新しい真理「u の表現数は u の約数の和」が得られた.

これには高校生は非常に感激した. いったい、これが何の役にたつの？と疑問を出すものもいなかった. 真理はそれ故に、パワフルなのであった.

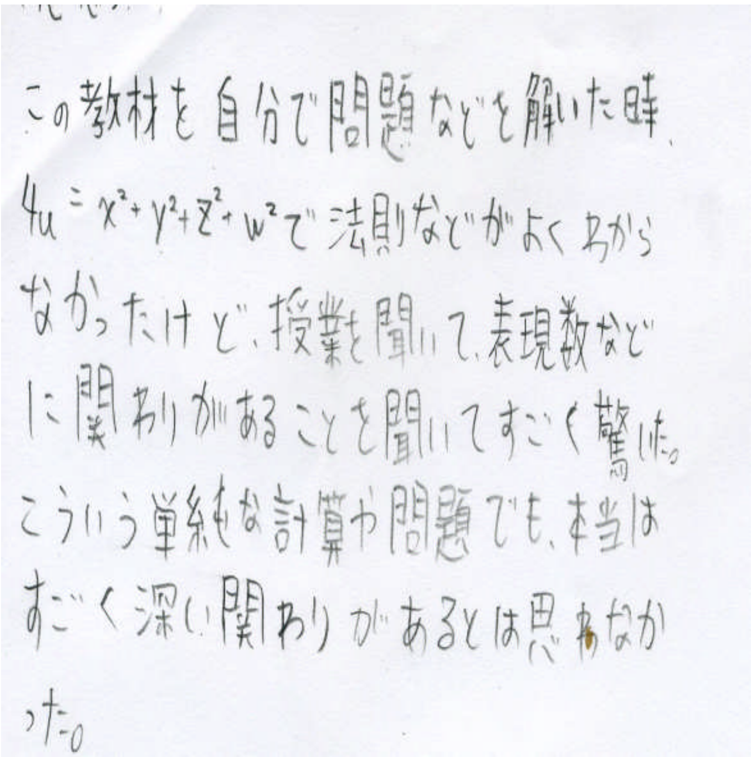

この教材を自分で問題などを解いた時、
$4u = x^2+y^2+z^2+w^2$ で法則などがよくわから
なかったけど、授業を聞いて、表現数など
に関わりがあることを聞いてすごく驚いた。
こういう単純な計算や問題でも、本当は
すごく深い関わりがあるとは思わなか
った。

図 7: 「こういう単純な計算や問題でも本当はすごく深い関わりがある」

ということに感動している.

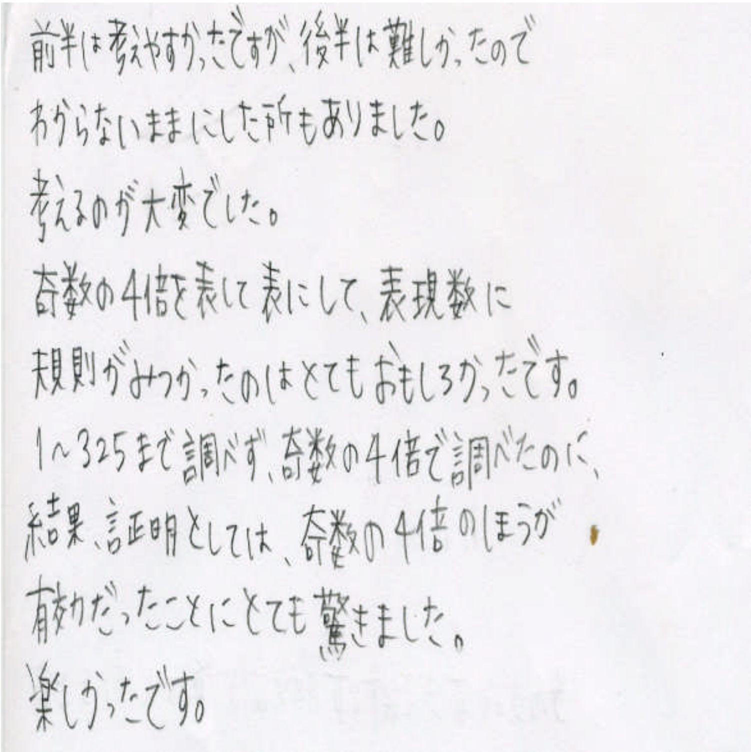

前半は考えやすかったですが、後半は難しかったので
わからないままにした所もありました。
考えるのが大変でした。
奇数の4倍を表して表にして、表現数に
規則がみつかったのはとてもおもしろかったです。
1〜325まで調べず、奇数の4倍で調べたのに、
結果、証明としては、奇数の4倍のほうが
有効だったことにとても驚きました。
楽しかったです。

図 8: 高校生は「とても驚いた. 楽しかったです.」

と率直に書いている.

高校生が本物の数学にふれて感動している.

私も、高校生が質問をすると思って気合いを入れて読んだ. それでも数学が分かればいいので、筋だけ追って、後は数学として読むのだが高校生はきちんと全部読んで考える.

その過程で、「u が個体であるか、」という意味が分からないと質問された. なるほど、これは不可解である. 数学で考えれば、1　か素数か、合成数で場合を分けているので個体は1であろう. そこで、 unity を個体と訳していることに気づいた. 英語版で調べると、この本では unity をすべて個体と訳している. これは豪傑訳としかいいようなない.